Cours sur les fonctions exponentielles

1. Définition de la fonction exponentielle

LEMME [1]

S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

PREUVE Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a : $h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)\left(-f'(-x)\right) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
La fonction h est donc constante et égale à $h(0) = f(0)f(0) = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)f(-x) = 1$ ce qui montre que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

PREUVE On prouve ici seulement l'unicité (pour la preuve de l'existence : ► Ex. 91 p. 140).
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Supposons alors qu'il existe une autre fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
Comme g ne s'annule pas d'après le lemme précédent, on peut poser $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a : $k'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \dfrac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$.
Donc la fonction k est constante et égale à $k(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ donc $f = g$ d'où l'unicité.

DÉFINITION

La fonction **exponentielle** est la fonction notée **exp** définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

2. Propriétés de la fonction exponentielle

THÉORÈME : Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y : $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

PREUVE Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ et y réel.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$ donc f est constante.
Ainsi, $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = f(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ d'où $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

1. Un **lemme** est un résultat préliminaire ou intermédiaire qui intervient parfois dans la preuve d'un théorème lorsqu'elle est un peu longue.

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

PREUVE

- $1 = \exp(0) = \exp(x+(-x)) = \exp(x)\exp(-x)$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- Pour $p \in \mathbb{N}$, on démontre par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :
  $\exp(0x) = \exp(0) = 1$ et $((\exp(x))^0 = 1$ puisque $\exp(x) \neq 0$.
  Supposons que pour un certain entier p donné, on ait $\exp(px) = (\exp(x))^p$. Alors :
  $\exp((p+1)x) = \exp(px+x) = \exp(px)\exp(x) = (\exp(x))^p\exp(x) = (\exp(x))^{p+1}$.
  Et si $-p \in \mathbb{N}$, alors $(\exp(x))^p = (\exp(-x))^{-p} = \exp(-p(-x)) = \exp(px)$.

Exemple $(\exp(1)-\exp(-1))^2 = (\exp(1))^2 - 2\exp(1)\exp(-1) + (\exp(-1))^2$
$= \exp(1\times2) - 2\exp(1-1) + \exp(-1\times2) = \exp(2) - 2\exp(0) + \exp(-2) = \exp(2) - 2 + \exp(-2)$.

3. Étude de la fonction exponentielle

A. Signe et variations

PROPRIÉTÉ

Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est :

- continue
- strictement positive
- strictement croissante

PREUVE

- Par définition, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right) = \exp\left(\dfrac{x}{2}\right) \times \exp\left(\dfrac{x}{2}\right)$ d'après la relation fonctionnelle.
  Ainsi, $\exp(x) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$ et comme $\exp(x) \neq 0$, alors $\exp(x) > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$. Donc, $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

B. Limites en $\pm\infty$

PROPRIÉTÉ

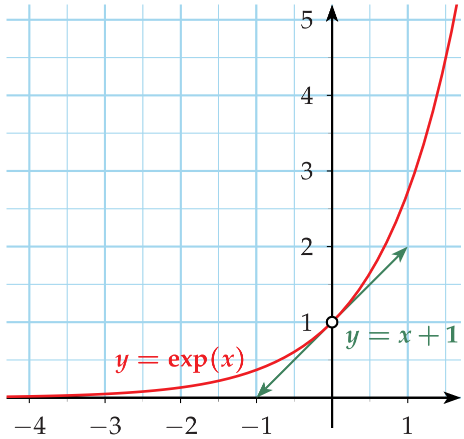
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$

PREUVE

- La fonction $f : x \mapsto \exp(x) - x - 1$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f'(x) = \exp(x) - 1$.
  Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc : $x \geqslant 0 \Rightarrow \exp(x) \geqslant 1$.
  Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante et minorée par $f(0) = \exp(0) - 0 - 1 = 0$.
  D'où, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) - x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant 1 + x$.
  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$.
- En posant $X = -x$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\exp(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\exp(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{\exp(X)} = 0$.

C. Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$



REMARQUES :

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentative en $-\infty$.
- La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0.

D. Une nouvelle notation

DÉFINITION

L'image de 1 par la fonction exp est notée **e**. Ainsi $\exp(1) = \mathrm{e}$.

REMARQUES :

- e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Comme π, c'est un nombre irrationnel et transcendant. Sa valeur approchée est : $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
  On étend cette relation aux réels et on peut alors écrire, pour tout réel x : $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$.

On peut ainsi réécrire avec une nouvelle notation tout ce qu'on a vu précédemment.
La fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
$\mathrm{e}^0 = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
Les autres propriétés écrites ci-après sont analogues aux propriétés des puissances.

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Exemple Le calcul donné dans l'exemple précédent (p. 120) s'effectue bien plus simplement :
$(\exp(1) - \exp(-1))^2 = \left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right)^2 = \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-1} + (\mathrm{e}^{-1})^2 = \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^{1-1} + \mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^2 - 2 + \mathrm{e}^{-2}$.

E. Équations et inéquations

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels x et y :

- $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = y$
- $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x < y$

PREUVE Ces propriétés sont des conséquences directes de la continuité et de la stricte croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$. Ainsi, $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-y} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x-y} = 1 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

REMARQUE : On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leqslant$ ou $\geqslant$.

MÉTHODE 1 **Résoudre une équation ou une inéquation avec exponentielles** ► Ex. 13 p. 125

Pour résoudre une équation d'inconnue x réel comportant des exponentielles :

1) On détermine l'ensemble des valeurs qu'on peut donner à x.

2) On essaye selon le cas de se ramener à :

- Une équation de la forme $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions.
  Alors, $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ et, éventuellement, $u(x) = v(x) \Leftrightarrow u(x) - v(x) = 0$.
- Une équation qu'on sait résoudre après avoir effectué un changement de variable.

La méthode est analogue pour résoudre une inéquation.

Exercice d'application Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions des équations et inéquations.

1) $e^{x^2+2x-3} = 1$ 2) $2\,e^{2x} - e^x - 1 = 0$ 3) $e^{\sqrt{3x-5}} < e$ 4) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1}$

Correction Dans les cas 1, 2 et 4, x peut prendre toute valeur réelle, donc on résout dans $\mathbb{R}$.

1) $e^{x^2+2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+2x-3} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$.
Donc, $\mathcal{S} = \{-3\,;\,1\}$.

2) $2\,e^{2x} - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\,(e^x)^2 - e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0$ en posant $X = e^x$.
$2X^2 - X - 1 = 0$ pour $X = -\dfrac{1}{2}$ ou $X = 1$. D'où, $e^x = -\dfrac{1}{2}$ (impossible) ou $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.
Finalement, l'équation $2\,e^{2x} - e^x - 1 = 0$ n'a que 0 pour solution. Donc, $\mathcal{S} = \{0\}$.

3) Il faut que x soit tel que $3x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{5}{3}$ donc on résout dans $\left[\dfrac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$.
$e^{\sqrt{3x-5}} < e^1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-5} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 3x - 5 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} \leqslant x < 2$. Donc, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{5}{3}\,;\,2\right[$.

4) $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow e^{2x+1-x+4} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow e^{x+5} \geqslant e^{x^2-1} \Leftrightarrow x+5 \geqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leqslant 0$.
Or, $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$. Ainsi, $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ si $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Donc, $\mathcal{S} = [-2\,;\,3]$.

F. D'autres limites

PROPRIÉTÉ

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

PREUVE

1) Soit la fonction $f : x \mapsto e^x - \dfrac{x^2}{2}$ sur $[0\,;\,+\infty[$. On a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
Or, $x \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant e^0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geqslant 0$ donc $f''(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f' est croissante et minorée par $f'(0) = 1$. Donc, $f'(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f est croissante et minorée par $f(0) = 1$. Donc, $f(x) \geqslant 0$ soit $e^x - \dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$.
D'où, pour $x > 0$, $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$. Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2) Par inverse de la limite précédente, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.
Donc, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = \lim_{x\to+\infty} -x\,e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$ d'après ce qui précède.

3) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x}$ est égale au nombre dérivée de $x \mapsto e^x$ en 0 soit $e^0 = 1$.

Remarque : On généralise pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

MÉTHODE 2 Déterminer une limite de fonction avec exponentielles

► Ex. 19 p. 125

Lorsque une limite de fonction comportant des exponentielles est *a priori* indéterminée (formes « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $(+\infty)+(-\infty)$ » ou « $0\times\infty$ »), on essaye, selon le cas, de transformer l'écriture ou de changer de variable.

Exercice d'application Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{2x}-x\,\mathrm{e}^{x}\right)$ 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}\right)$ 3) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}\right)$

Correction

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\mathrm{e}^{x}=+\infty$. Ainsi, par différence, la limite est indéterminée.
Le terme e^{2x} étant prépondérant, on le met en facteur : $\mathrm{e}^{2x}-x\,\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{2x}\left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right)$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$. Donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right)=1$.
Finalement, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x}\left(1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}\right)=+\infty$.

2) Posons $X=\dfrac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}X=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{X}+2}{\mathrm{e}^{X}+1}\right)$.
Or, $\lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^{X}=0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{X\to-\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{X}+2}{\mathrm{e}^{X}+1}\right)=2$.

3) Posons $X=\dfrac{1}{x}$. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}X=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+2}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{X}+2}{\mathrm{e}^{X}+1}\right)$.
Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{X}=+\infty$ donc, par quotient, la limite est indéterminée.
Le terme e^{X} étant prépondérant, on multiplie par e^{-X} numérateur et dénominateur :
$\dfrac{\mathrm{e}^{X}+2}{\mathrm{e}^{X}+1}=\dfrac{1+2\,\mathrm{e}^{-X}}{1+\mathrm{e}^{-X}}$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{-X}=0$ donc, par quotient, $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\dfrac{1+2\,\mathrm{e}^{-X}}{1+\mathrm{e}^{-X}}\right)=1$.

4. Fonction composée e^{u}

PROPRIÉTÉ (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^{u}, composée de u suivie de $x\mapsto\mathrm{e}^{x}$, est dérivable sur I et on a $(\mathrm{e}^{u})'=u'\,\mathrm{e}^{u}$.

Exemple Soit la fonction $f : x\mapsto\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^{+}$.

La fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc la fonction f, composée de racine carrée suivie d'exponentielle, est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\mathrm{e}^{\sqrt{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

REMARQUE : e^{u} varie comme u. Par exemple, si u est strictement décroissante sur I, alors pour tous a et b dans I : $a<b\Rightarrow u(a)>u(b)$. Or, exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $u(a)>u(b)\Rightarrow\mathrm{e}^{u(a)}>\mathrm{e}^{u(b)}$. Ainsi, e^{u} est strictement décroissante sur I.

Exemple $x\mapsto-x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ aussi.