Trigonométrie

EXERCICE 1 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = cos(4x)sin^2(4x)$.

1)Montrer que g est paire. Interpréter graphiquement.

2)Montrer que g est $\frac{\pi}{2}$ - périodique.

EXERCICE 2 :

soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = cos(x) + sin(x)$.

1)Montrer que g n'est ni paire ni impaire.

2)Montrer que g est 2π - périodique. Interpréter graphiquement.

3)Montrer que, pour tout réel x, $-2 \leq\ g(x) \leq\ 2$.

EXERCICE 3 :

1)A partir de $cos(\frac{\pi}{3})$, déterminer $cos(-\frac{\pi}{3})$ puis $cos(\frac{2\pi}{3})$.

2)Même question avec $sin(-\frac{\pi}{3})$ puis $sin(\frac{2\pi}{3})$.

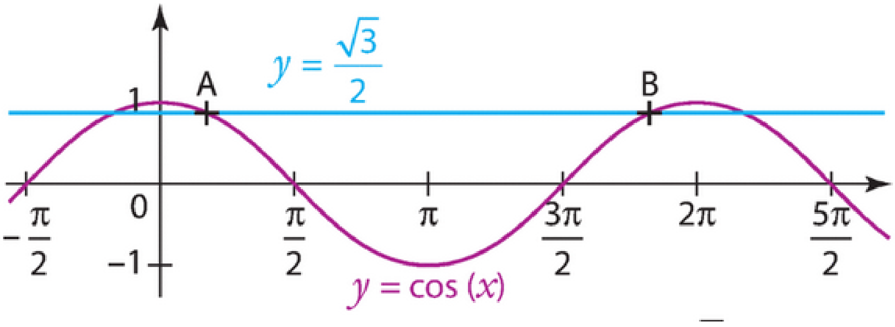
EXERCICE 4 :

1)Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'équation $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2)Résoudre sur $[0;2\pi[$, l'équation $sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

EXERCICE 5 :

1.Donner les abscisses des points A et B.



2)Résoudre sur $[0; 2\pi[$, l'équation $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3)Résoudre sur $[0; 2\pi[$, l'inéquation $cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

EXERCICE 6 :

Dans chaque cas, vérifier que la fonction f est T-périodique.

$a) f : x \mapsto cos(2\pi\, x)$ et T = 1.

$b) f : x \mapsto sin(3x)$ et $T = \frac{2\pi}{3}$.

$c) f : x \mapsto \frac{2}{3}cos(7x + \frac{\pi}{4})$ et $T = \frac{2\pi}{7}$.

$d) f : x \mapsto \frac{10}{7}sin(\frac{5x - 8}{3})$ et $T = \frac{6\pi}{5}$.

EXERCICE 7 :

1.a)Déterminer un réel x appartenant à l'intervalle $-\pi; \pi[$ associé à $\frac{91\pi}{4}$.

b)En déduire $cos(\frac{91\pi}{4})$ puis, $sin(\frac{91\pi}{4})$.

2.a)Calculer $cos(-\frac{13\pi}{6})$.

b)Calculer $sin(-\frac{81\pi}{2})$.

3)a)Calculer $cos(\frac{25\pi}{3})$ et en déduire $sin(\frac{25\pi}{3})$.

b)Calculer $sin(\frac{45\pi}{6})$ et en déduire $cos(\frac{45\pi}{6})$.

EXERCICE 8 :

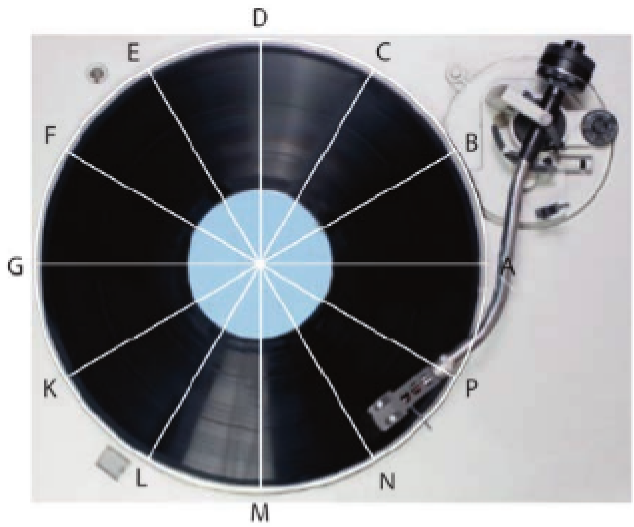
Soit f la fonction définie sur $]-\pi;\pi]$ par :

$f(x) = 4cos^2(x) + 2(\sqrt{2} - l)cos(x) - \sqrt{2}.$
Le but de l'exercice est de trouver les solutions de l'équation
f(x) = 0 et de l'inéquation f(x) > 0.
1. On pose X = cos(x).
a) Montrer que -1 <X< 1.
b) Montrer que résoudre l'équation f(x) = 0 revient à
résoudre l'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - l)X - \sqrt{2} = 0.$

c)Résoudre sur [- 1 ; 1], l'équation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - l)X - \sqrt{2} = 0.$
On notera X_1 et X_2 les solutions obtenues.
d) En déduire les solutions sur $]-\pi\,;\,\pi]$ de l'équation f(x) = 0.
2. On pose X = cos(x).
a) Résoudre sur [-1 ; 1] l'inéquation $4X^2 + 2(\sqrt{2} - l)X - \sqrt{2} > 0.$

EXERCICE 9 :

1. Un disque microsillon tournant 33 tours et $\frac{1}{3}$ de tour par minute contient 6 chansons pour une durée
totale de 60 min. La durée de chaque chanson est la même.
Le Saphir situé l'extrémité du bras de lecture étant situé en N au début de la 1ère chanson, sur quel demi-axe se trouvera-t-il la fin de la chanson ?



2. Un disque microsillon tourne 16 tours et $\frac{2}{3}$ de tour par minute.

La durée de chaque chanson est égale 5 min.

Le saphir situé l'extrémité du bras de lecture étant situé en P au début de la 1ère chanson, sur quel demi-axe se trouvera-t-il :
a) au bout de 3 min ?
b) au bout de 4 min ?
c) à la fin de la 1ère chanson ?
d) à la fin de la 2ème chanson ?

EXERCICE 10 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{cos(x)}{3 + sin^2(x)}$.
1. Montrer que f est paire et 2π-périodique.

Interpréter graphiquement.
2. En déduire le plus petit intervalle I possible pour étudier f.
3. On admet que f est dérivable de dérivée :

$f'(x) = \dfrac{sin(x)(sin^2(x) - 5)}{(3 + sin^2(x))^2}$.
a) En déduire les variations de la fonction f sur I.
b) Préciser les extrema locaux de f sur I.
c) Tracer la courbe représentative de f sur [-π ; 3π].

EXERCICE 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{cos^3(x)}{3}$.
1. Montrer que f est paire et 2π-périodique. Interpréter graphiquement.
2. On admet que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie par :
$f'(x) = cos^2(x)sin(x)$.

a) Étudier le signe de $f'(x)$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 2π[.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; 3\pi[$.

EXERCICE 13 :

On note (E) l'équation $cos(x) = -x$.
1.Montrer que les solutions de cette équation appartiennent l'intervalle [—1 ; 1].
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle [—1 ; 1] par f(x) = cos(x) + x.
a) Tracer f à l'aide de la calculatrice puis conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E). Justifier la démarche.
b) On admet que la dérivée de la fonction $x \mapsto cos(x)$ est la fonction $x \mapsto -sin(x)$.

En déduire que $f'(x) = -sin(x) + 1$.
c) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [—1 ; 1].

d) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 0,01 prés de la (ou les) solution(s).

EXERCICE 14 :

Les lentilles situées en haut de ce phare ont une portée lumineuse de 45 km et une durée de rotation de 5 secondes.
1.Déterminer l'angle parcouru par une lentille en 1 seconde.
2. Calculer l'aire balayée par une lentille en 1 seconde.

EXERCICE 15 :

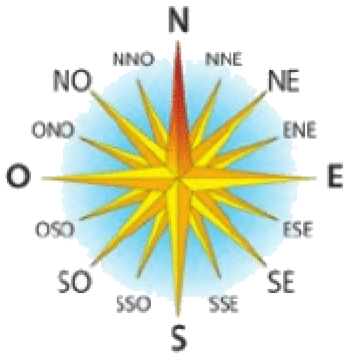
Soit m un paramètre réel non nul et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = cos(mx)$.
1. Montrer que f_m est paire. Interpréter graphiquement.
2. Montrer que f_m est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{m}$.
3. En déduire qu'on peut étudier f_m sur l'intervalle $[0; \dfrac{\pi}{m}]$.
4. On admet que f_m est dérivable de dérivée :

$f'_m(x) = -msin(mx)$. Selon m :
a) Déterminer le signe de $f'_m(x)$ sur l'intervalle $[0; \dfrac{\pi}{m}]$.

b) En déduire les variations de f_m sur l'intervalle $[0; \dfrac{\pi}{m}]$.
c) Dresser le tableau de variations de f_m sur l'intervalle $[0; \dfrac{\pi}{m}]$ puis sur l'intervalle $[-\dfrac{\pi}{m}; \dfrac{2\pi}{m}]$.

EXERCICE 16 :

On considère la rose des vents ci-dessous.
On admet qu'un réel ayant pour image le sens « E » est 0 et qu'un réel ayant le sens « N » est $\dfrac{\pi}{2}$.



1.Déterminer un réel ayant pour image le sens « O ».
2.Déterminer un réel ayant pour image le sens « S ».
3.Déterminer un réel ayant pour image le sens « NE ».
4.a) Déterminer un réel ayant pour image le sens « NNE »
b) Par symétrie, quel réel peut avoir pour image le sens « SSE» ?
c) Par symétrie, quel réel peut avoir pour image le sens « NNO » ?

EXERCICE 17 :

Calculer :

$$A = cos(\frac{\pi}{4}) + cos(\frac{3\pi}{4})$$

$$B = sin(\frac{\pi}{3}) - cos(\frac{\pi}{4}) + sin(\frac{5\pi}{3})$$

$$C = cos^2(\frac{\pi}{2}) - sin^2(\frac{\pi}{2})$$

EXERCICE 18 :

Calculer :

$$D = -cos(\frac{7\pi}{3}) + cos(\frac{41\pi}{3})$$

$$B = sin(-\frac{87\pi}{4}) + sin(-\frac{21\pi}{6})$$

EXERCICE 19 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

EXERCICE 20 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = acos(x) + bsin(x)$.

La courbe représentative de f passe par les points $M(-\frac{\pi}{2}; 2)$ et $N(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$.

1.A l'aide des points M et N, déterminer les réels a et b.
2.En déduire l'expression de f en fonction de x.
3. Montrer que f est 2π-périodique. Interpréter graphiquement.

4. f est-elle paire ? impaire ? Justifier.

Consulter le corrigé.