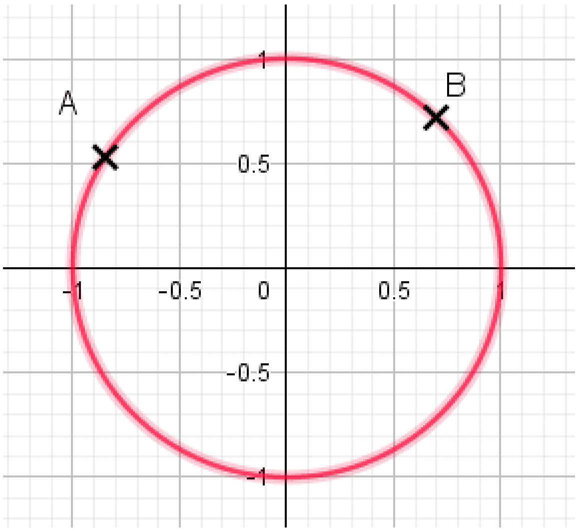
Trigonométrie et relations métriques

I. Les fonctions de la trigonométrie

Dans cette leçon, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal de sens direct.

Les points A et B sont donc sur le **cercle trigonométrique** de centre O et de rayon 1.



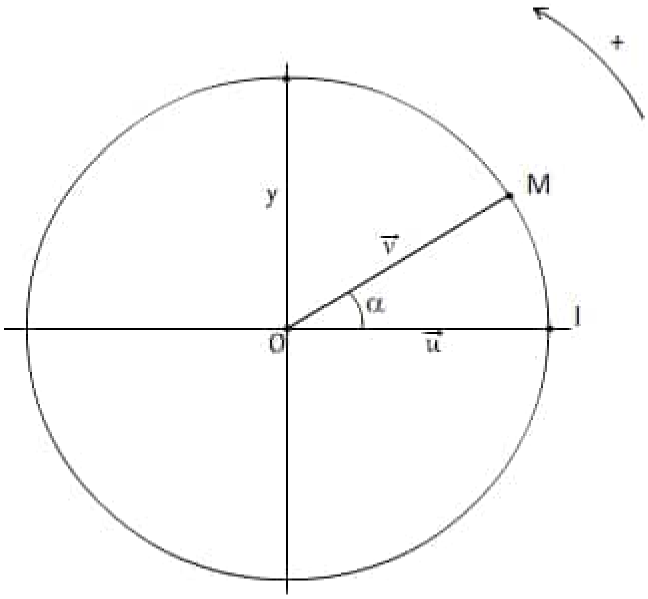
1.Définition du sinus et du cosinus d’un nombre réel.

Définition :

A tout réel α, on associe le point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{u},\vec{OM})$ mesure α radian(s).

Le **cosinus** et le **sinus** de α sont donc les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On a: $M(cos\alpha\,,sin\,\alpha\,)$ c’est à dire : $\vec{OM}=cos\alpha\,\vec{u}+sin\alpha\,\vec{v}$.



2.Premières propriétés en trigonométrie .

Propriétés :

- Si α=0 alors le point du cercle trigonométrique associé à α est le point A(1 ; 0). Donc cos(0) = 1 et sin(0) = 0

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors le point du cercle trigonométrique associé à α est B(0 ; 1).Donc $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

- Si $\alpha = \pi$, alors x est associé à A'(-1 ;0). Donc $cos(\pi) = -1$ et $sin(\pi) = 0$.

- Si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ alors α est associé à B'(0 ;-1). Donc $cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

- Si α est un réel alors pour tout entier relatif k, les réels α et $\alpha + 2k\pi$ sont associés au même point M.
  En effet ce sont deux mesures de l'angle orienté .
  Donc, pour tout nombre réel x et tout entier relatif k, on a:

$cos(\alpha + 2k\pi) = cox(\alpha)$

$sin(\alpha + 2k\pi) = sin(\alpha)$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π , car T = 2π est le plus petit réel strictement positif tel que: cos (α + T) = cos α et sin (α + T) = sin α .

Le théorème de Pythagore permet de prouver l'égalité:
$(sin\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$ que l'on écrit aussi sous la forme: $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$.

3.Signe du sinus et du cosinus.

Par définition, le sinus et le cosinus de tout nombre réel appartiennent à l'intervalle [-1 ; 1].

Plus précisément, la position de M nous permet d'en savoir plus sur le cosinus et le sinus de α .

Propriétés :

On a :

- Si $\alpha \in [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ alors $sin\alpha \geq 0$.
- Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ alors $cos\alpha \geq 0$.

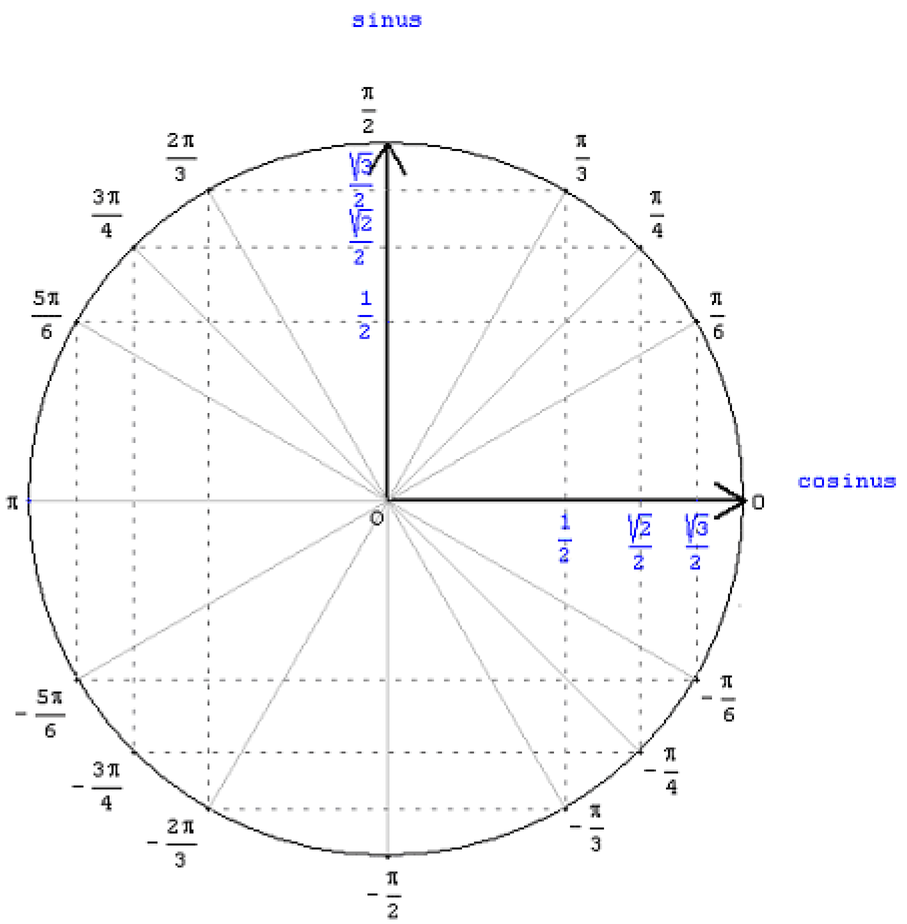
II. Cosinus et sinus d'angles remarquables en trigonométrie.

Tous ces résultats à connaître parfaitement sont résumés dans le tableau ci-dessous:

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x (en degrés)	0	30	45	60	90	180
Cos (x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sin (x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

III.Visualisation des sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique.

C’est un outil indispensable, qu’il est utile de bien visualiser afin d’être capable de retrouver rapidement les valeurs indiquées ci-dessous.



IV.Formules usuelles concernant les angles associés.

Propriétés :

Pour tout réel x, on a:

$\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
La fonction cosinus est donc **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Propriétés :

Pour tout réel x, on a:

cos(π – x) = – cos(x) et   sin(π – x) = sin(x).

Propriétés :

Pour tout réel x, on a:

cos(π + x) =   – cos(x) et sin(π + x) =   – sin(x).

Propriétés :

Pour tout réel x, on a:

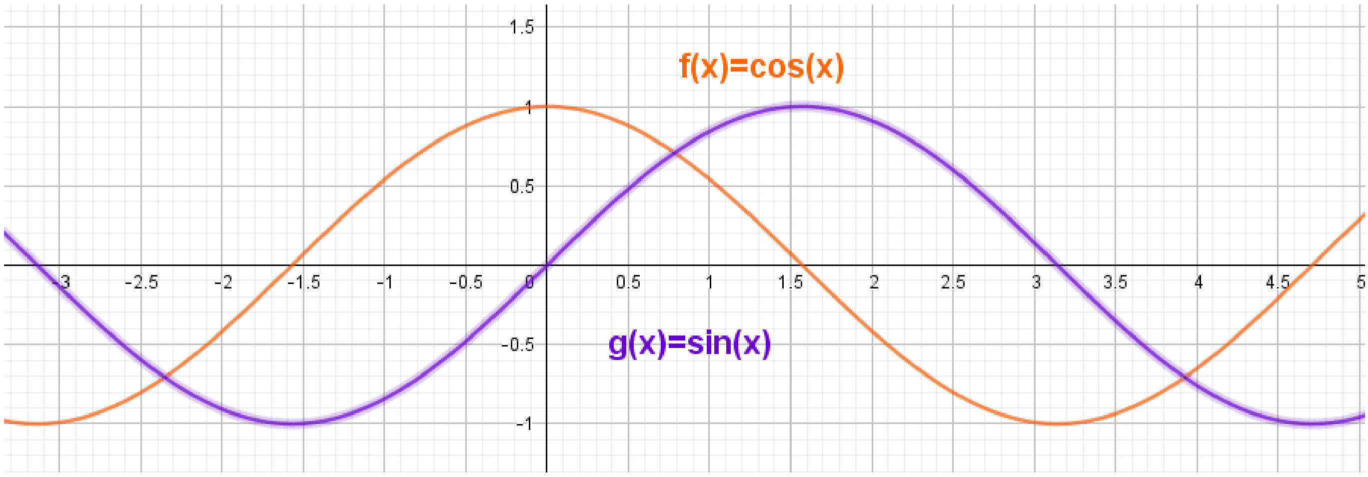
cos($\frac{\pi}{2} + x$) = - sin(x)   et   sin($\frac{\pi}{2} + x$) = cos(x).

Propriétés :

Pour tout réel x, on a:

cos($\frac{\pi}{2} - x$) = sin(x)   et   sin($\frac{\pi}{2} - x$) = cos(x).

V.Représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus


f(x)=cos(x)
g(x)=sin(x)
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5