



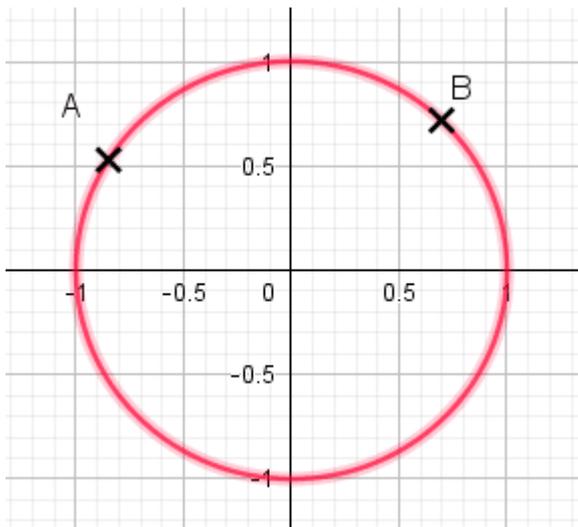
Trigonométrie

En effet, il faut savoir que la trigonométrie est un chapitre très important et nécessite l'utilisation de certains matériels géométriques.

I. Les fonctions trigonométriques

Dans cette leçon, (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormal de sens direct.

Les points A et B sont donc sur le **cercle trigonométrique** de centre O et de rayon 1.



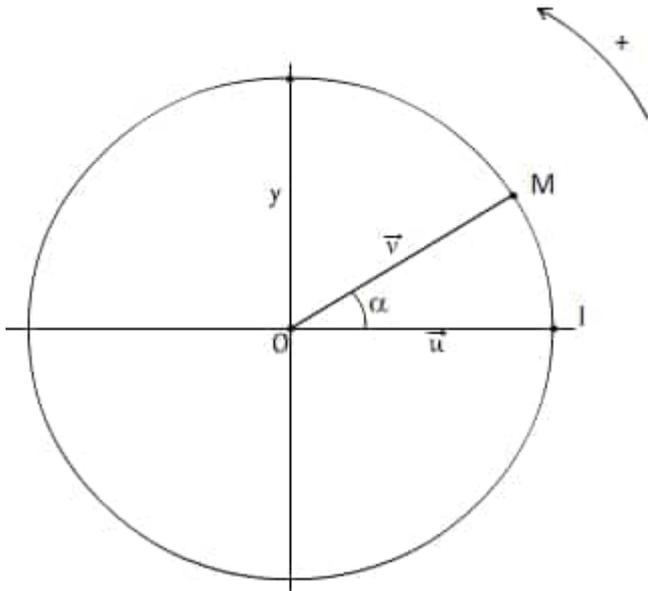
1. Définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.

Définition :

A tout réel α , on associe le point M du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté (\vec{u}, \vec{OM}) mesure α radian(s).

Le **cosinus** et le **sinus** de α sont donc les coordonnées de M dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On a : $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ c'est à dire : $\vec{OM} = \cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{v}$.



2. Premières propriétés en trigonométrie .

Propriétés :

- Si $\alpha=0$ alors le point du cercle trigonométrique associé à α est le point A(1 ; 0). Donc $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, alors le point du cercle trigonométrique associé à α est B(0 ; 1). Donc $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- Si $\alpha = \pi$, alors x est associé à A'(-1 ; 0). Donc $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.
- Si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ alors α est associé à B'(0 ; -1). Donc $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ et $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.
- Si α est un réel alors pour tout entier relatif k, les réels α et $\alpha + 2k\pi$ sont associés au même point M.
En effet ce sont deux mesures de l'angle orienté .
Donc, pour tout nombre réel x et tout entier relatif k, on a:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π , car $T = 2\pi$ est le plus petit réel strictement positif tel que: $\cos(\alpha + T) = \cos \alpha$ et $\sin(\alpha + T) = \sin \alpha$.

Le théorème de Pythagore permet de prouver l'égalité:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \text{ que l'on écrit aussi sous la forme: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

3. Signe du sinus et du cosinus en trigonométrie

Par définition, le sinus et le cosinus de tout nombre réel appartiennent à l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Plus précisément, la position de M nous permet d'en savoir plus sur le cosinus et le sinus de α .

Propriétés :

On a :

- Si $\alpha \in [0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ alors $\sin \alpha \geq 0$.
- Si $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ alors $\cos \alpha \geq 0$.

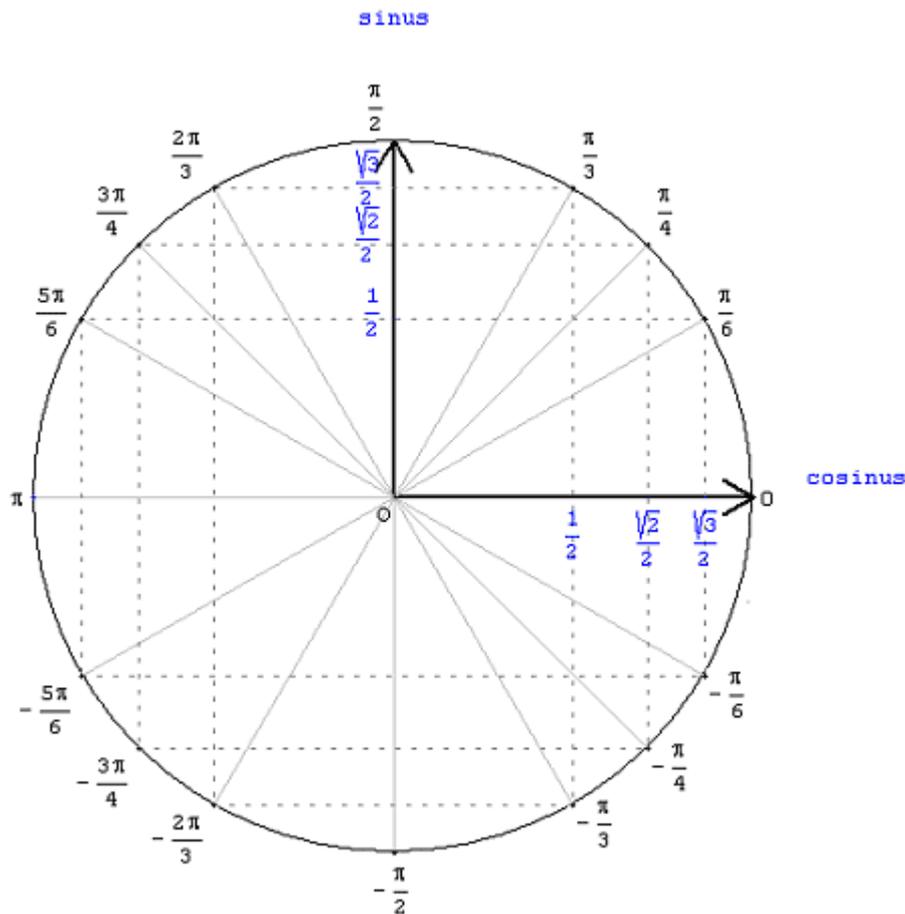
II. Cosinus et sinus d'angles remarquables en trigonométrie

Tous ces résultats à connaître parfaitement sont résumés dans le tableau ci-dessous:

x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x (en degrés)	0	30	45	60	90	180
Cos (x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sin (x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

III. Visualisation des sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique.

C'est un outil indispensable, qu'il est utile de bien visualiser afin d'être capable de retrouver rapidement les valeurs indiquées ci-dessous.



IV. Formules usuelles concernant les angles associés.

Propriétés :

Pour tout réel x , on a:

$$\cos(-x) = \cos(x) \text{ et } \sin(-x) = -\sin(x).$$

La fonction cosinus est donc **paire** et la fonction sinus est **impaire**.

Propriétés :

Pour tout réel x , on a :

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin(x).$$

Propriétés :

Pour tout réel x , on a :

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x).$$

Propriétés :

Pour tout réel x , on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x).$$

Propriétés :

Pour tout réel x , on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

V. Représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus en trigonométrie

