Théorème de Pythagore

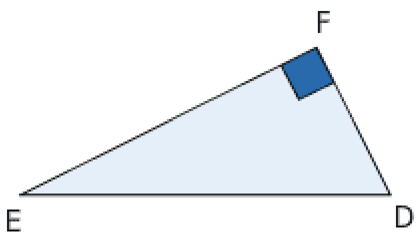
I. Vocabulaire du triangle rectangle

Définition :

- Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit;
- Le coté le plus long d'un triangle rectangle, qui est le côté opposé à l'angle droit, s'appelle l'**hypoténuse**.

Exemple :

- DEF est un triangle rectangle en F;
- [ED] est l'hypoténuse : c'est le plus long côté du triangle rectangle;
- Les deux côtés adjacents à l'angle droit sont [FD] et [FE], ils sont perpendiculaires.



II. Partie directe du théorème de Pythagore

1.Théorème de Pythagore

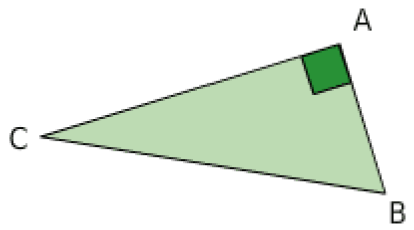
Théorème :

Si un triangle est rectangle alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés adjacents à l'angle droit.

Exemple :

ABC est un triangle rectangle en A donc d'après la partie directe du théorème de Pythagore,

nous avons : $BC^2 = AC^2 + AB^2$.



2. Calcul de la longueur de l'hypoténuse

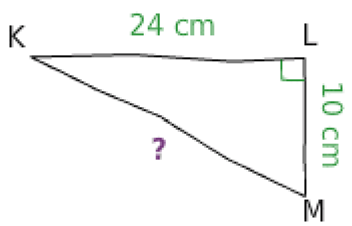
Exemple :

Soit KLM un triangle rectangle en L tel que KL = 24 cm, LM = 10 cm.

Calculer KM.

Le triangle KLM est rectangle en L donc d'après la partie directe du théorème de Pythagore, nous avons l'égalité suivante :

$KM^2 = KL^2 + LM^2$
$KM^2 = 24^2 + 10^2$
$KM^2 = 576 + 100$
$KM^2 = 676$
$KM = \sqrt{676}$
$KM = 24\,cm$



3. Calcul de la longueur d'un côté adjacent à l'angle droit

Exemple :

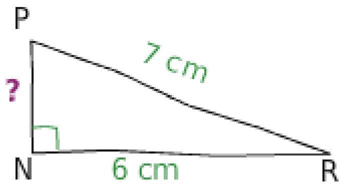
Soit NPR un triangle rectangle rectangle en N tel que PR = 7 cm et Nr = 6 cm.

Calculer NP (arrondir le résultat au dixième).

Le triangle PNR est rectangle donc d'après la partie directe du théorème de Pythagore,

nous avons l'égalité suivante :

$PR^2 = PN^2 + NR^2$
$7^2 = PN^2 + 6^2$
$49 = PN^2 + 36$
$PN^2 = 49 - 36$
$PN^2 = 13$
$PN = \sqrt{13}$
$PN \approx, 3,6\,cm$



4. Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple :

Soit STU un triangle rectangle en U tel que ST = 9,5 cm; Su = 2,3 cm et UT = 9,2 cm.

Le plus grand côté est [ST].

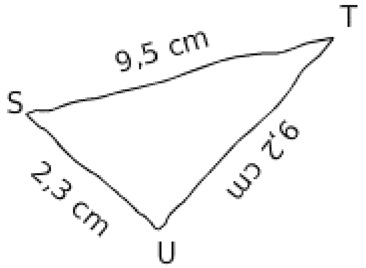
Je calcule séparément :

$ST^2 = 9,5^2 = 90,25\,cm^2$

$SU^2 + UT^2 = 2,3^2 + 9,2^2 = 5,29 + 84,64 = 89,93\,cm^2$

$ST^2 \neq\ SU^2 + UT^2$ donc le triangle SUT n'est pas rectangle.

Figure à main levée :



III. Partie réciproque du théorème de Pythagore

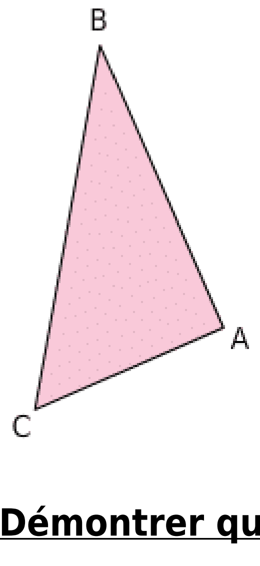
1. Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème :

Si, dans un triangle, le carré du côté le plus long est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

Exemple :

ABC est un triangle tel que $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc, d'après la partie réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.



2. Démontrer qu'un triangle est rectangle

Exemple :

Soit DEF un triangle tel que FD = 4 cm; FE = 5 cm et DE = 3 cm.

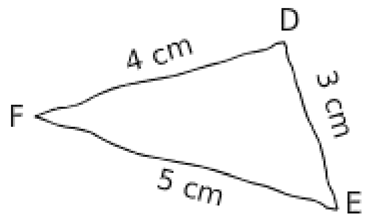
Le côté le plus long est [FE].

Je calcule séparément :

$$FE^2 = 5^2 = 25\,cm^2$$
$$FD^2 + DE^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25\,cm^2$$

$FE^2 = FD^2 + DE^2$ donc le triangle FED est rectangle en D.

Figure à main levée :

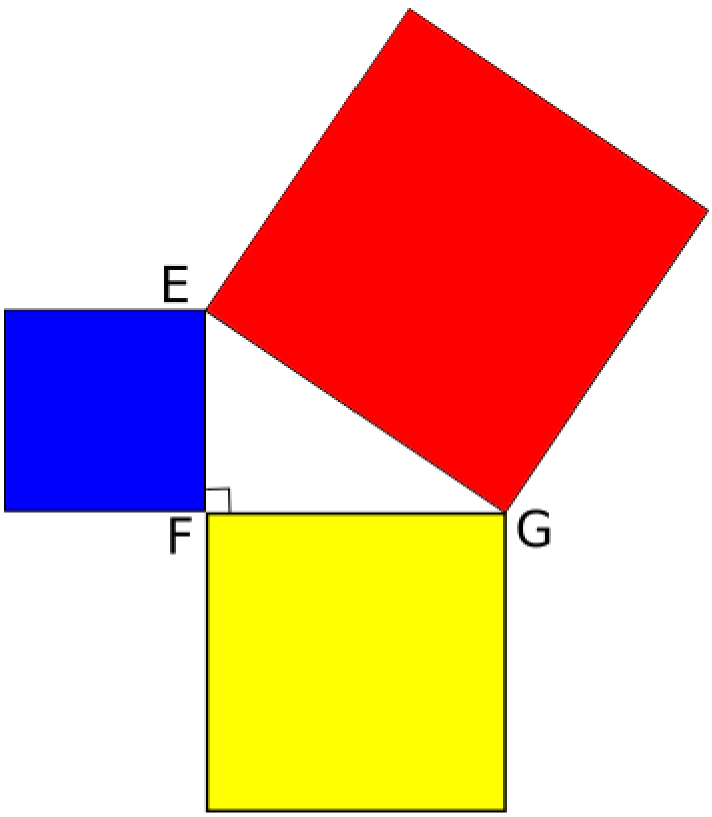


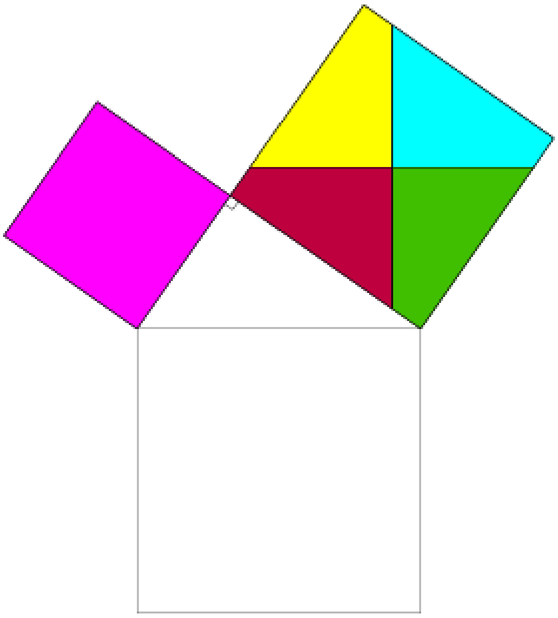
IV. Signification géométrique du théorème de Pythagore

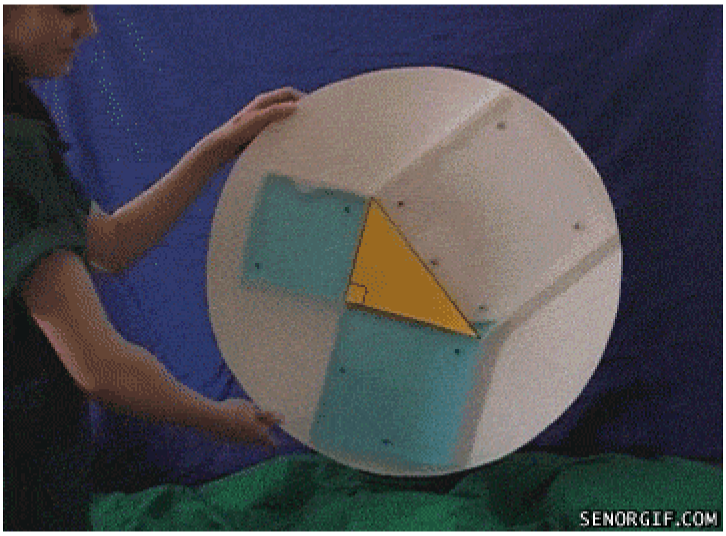
Propriété :

Si DEF est un triangle rectangle en F alors DE²=EF²+DF².

$Aire_{carre\,rouge} = Aire_{carre\,bleu} + Aire_{carre\,jaune}$







Application :

Une chèvre C est attachée à un piquet P planté au coin d'un pré carré de 15 m de côté.

Quelle doit être, approximativement, la longueur de la corde pour que la chèvre puisse brouter tout le pré?