Suites numériques

EXERCICE N° 1 :

u est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

Avec le tableur, on a obtenu ci-dessous les premières valeurs de u_n et u_n^2.

	A	B	C
1	n	u_n	u_n^2
2	0	0	0
3	1	1	1
4	2	1,41421356	2
5	3	1,73205081	3
6	4	2	4
7	5	2,23606798	5
8	6	2,44948974	6

1. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
2. Valider cette conjecture par un raisonnement par récurrence.

EXERCICE N° 2 :

V est la suite définie par $V_0 = 0$ et pour tout nombre entier naturel n, $V_{n+1} = V_n + 2n + 2$.

Démontrer par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $V_n = n(n+1)$.

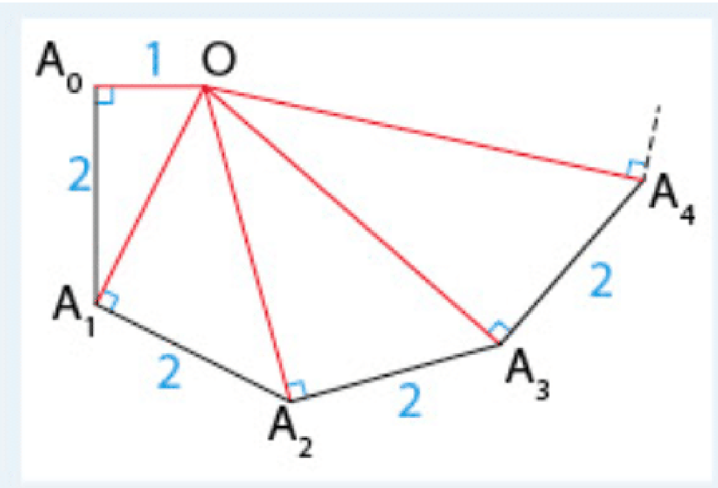
EXERCICE N° 3 :

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n \geq \ n + 1$.

EXERCICE N° 4 :

Sur cette figure :

- $OA_0 = 1$
- $A_0A_1 = A_1A_2 = ... = 2$
- les triangles $OA_0A_1, OA_1A_2, ...$ sont rectangles.



Démontrer par récurrence, que pour tout nombre entier naturel n, $OA_n = \sqrt{4n+1}$.

EXERCICE N° 5 :

Etudier, en justifiant, la limite en l'infini de chacune des suites numériques suivantes :

1. $u_n = 3(2 - 0,9^n)$
2. $v_n = 1,01^n - 5$
3. $w_n = \dfrac{3 + 0,2^n}{0,9^n - 5}$
4. $t_n = \dfrac{4^n + 5}{2 \times \ 3^n}$

EXERCICE N° 6 :

u est la suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_1 = -3$.

1. Pour tout nombre entier naturel n non nul, exprimer $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ en fonction de n.
2. Etudier la limite de la suite (S_n).

EXERCICE N° 7 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}.$$

1)Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

a)Etudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.

b) En déduire que si $x \in [0;1]$, alors f ' (x) $\in [0;1]$.

2)Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.

3)Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

EXERCICE N° 8 :

La suite (u_n) est définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

1)A l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer les dix premiers

termes de la suite (u_n).

2)a)Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?

b)Démontrer cette conjecture par récurrence.

EXERCICE N°9 :

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{q=1}^{n} q^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EXERCICE N° 10 :

Déterminer la limite de (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ en utilisant les théorèmes généraux.

1)$u_n = (1-2n)(n^2+3)$.

2)$u_n = \dfrac{3}{3+2n}$.

$3) u_n = 4n - 1 + \frac{5}{\sqrt{n}}.$

$4) u_n = -n^2 - 5n + \frac{1}{n}$

EXERCICE N°11 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 1.$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$v_n = 4u_n - 3.$

1)Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

Préciser le premier terme.

2) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et en déduire que,

pour tout entier naturel n :

$u_n = \frac{17}{4} \times \ (-\frac{1}{3})^n + \frac{3}{4}.$

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE N° 12 :

Etudier si les suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}$, sont bornées.

$1) u_n = (\frac{1}{3})^n - 8.$

$2) u_n = 5sin(5n + 1) - 3.$

$3) u_n = cos(n^2) - n.$

Consulter le corrigé.