Suites numériques

I. Les suites numériques

1.Définition et vocabulaire

Définition :

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, $u : n \mapsto u(n)$.

2. Notations et vocabulaire

Notations :

L'écriture fonctionnelle u(n) est peu utilisée pour désigner l'image de l'entier naturel n par la fonction u. On lui préfère la *notation indexée (ou indicée)*: u_n .

Avec cette notation l'image de 0 est u_0.
On appelle $u(0) = u_0$, le premier terme de la suite (u_n) .

De même, $u(1) = u_1$ est le second terme de la suite s.

De façon générale:
u_n est le terme d'indice n ou de rang n de la suite (u_n).
On dit aussi que u_n est le *terme général* de la suite (u_n).

On écrit aussi $u = (u_n)$, pour indiquer qu'il s'agit de la suite dont le terme de rang n est u_n où n$\in\mathbb{N}$.

REMARQUE:

Il arrive parfois que le premier terme d'une suite (u_n) ne soit pas u_0 .
Par exemple :

$u_n = \frac{1}{n}$ n'existe pas pour n = 0.

La suite commence au rang 1.

On écrira alor (u_n)n∈ℕ.

$t_n = \frac{1}{n(n-1)}$ n'existe pas pour n = 0, ni pour n = 1.

La suite commence au rang 2.

Dans tous les cas de ce type-là, on précisera le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ où la suite est définie.

II.Diverses manières de définir une suite

1. Suites définies par une égalité fonctionnelle

Définition :

> Une suite numérique étant une fonction définie sur $\mathbb{N}$, c'est donc la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou un sous ensemble de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{N}$.

Par exemple, la suite $u_n = n^2$ (n∈ $\mathbb{N}$), est la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. L'intérêt de cette remarque réside dans le fait que les propriétés déjà étudiées pour les fonctions de la variable réelle seront utilisables pour les suites.

2.Suite définie par une formule de récurrence

Définition :

> La spécificité des suites sur les fonctions de la variable réelle, est que, pour tout entier naturel n, son image u_n étant "numérotable", on peut définir le terme u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n par une formule appelée **formule de récurrence.**Plus précisément, la suite (u_n) sera définie par récurrence par:
> - Son premier terme u_0 .
> - Une égalité reliant deux termes consécutifs quelconques de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par exemple, la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et la **formule de récurrence** vérifiée pour tout entier n: $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

III. Les suites arithmétiques et géométriques:

1.Définitions et formules

Notations :

Soit n un entier naturel quelconque :

	Suite (u_n) arithmétique de raison r	Suite (u_n) géométrique de raison q $\neq 0$
Premier terme	u_0	u_0
Formule de récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q\,u_n$
Caractérisations	$u_{n+1} - u_n = r$ **(constante)**	si $u_0 \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ **(constante)**
Terme de rang n : formule de fonction	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0\,q^n$

EXEMPLES:

- La suite des entiers naturels est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
- La suite des entiers naturels pairs est la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.
- La suite des entiers naturels impairs est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.
- La suite définie par la formule: U_n = an + b (fonction affine de n) est la suite arithmétique de premier terme U_0 = b et de raison a.

- La suite constante de terme général U_n = 2 est la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 1.
- La suite de terme général $U_n = (-1)^n$ est la suite géométrique de premier terme U_0 = 1

et de raison -1.

- La suite des puissances d'un nombre réel a non nul, de terme général $U_n = a^n$ est la suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison a.

- La suite définie par la formule: $U_n = a\, b^n$ (fonction exponentielle de n) est la suite géométrique de premier terme $U_0 = a$ et de raison b (b réel non nul).

2.Somme des termes des suites arithmétiques

Propriété :

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, on a:
Pour tout entier naturel n, on a:

$$\sum_{k=o0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

3.Somme des n premiers entiers

Propriété :

$$\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

4.Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété :

Pour tout entier naturel n, et pour tout réel $q \neq 1$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Moyen mnémotechnique :

$$\frac{suivant - premier}{raison - 1}.$$

Propriété :

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison$q \neq 1$, on a:

$$\sum_{k=o0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{u_{n+1} - u_0}{q - 1}.$$

IV. Principe du raisonnement par récurrence

Définition :

Il permet de prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier n_0 fixé (qui est souvent zéro).On procède de la façon suivante:
-On vérifie que la **propriété est vraie au départ** pour un entier n = n_0 (on a souvent n_0 = 0).
- On prouve que la **propriété est héréditaire**, c'est à dire que:
Si la propriété est vraie pour un entier naturel **quelconque** $n \geq n_0$, alors elle est encore vraie pour l'entier consécutif $n + 1$.
On en déduit alors, de proche en proche, que la propriété est vraie quel que soit l'entier naturel $n \geq n_0$.