Produit scalaire

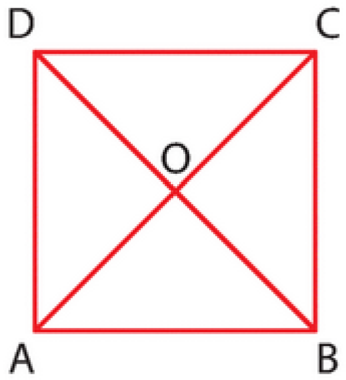
EXERCICE 1 :

On considère le carré ABCD de centre O et de côté 8.

Calculer les produits scalaires suivants.

$a)\vec{AB}.\vec{AO}$ $\quad$ $b)\vec{OB}.\vec{OD}$

$c)\vec{AB}.\vec{AD}$ $\quad$ $d)\vec{BO}.\vec{BC}$



EXERCICE 2 :

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{(\vec{u},,\vec{v})} = 60°$.

Calculer leur produit scalaire.

EXERCICE 3 :

Déterminer une valeur en degrés de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v}, = -6$.

EXERCICE 4 :

Soient les vecteurs $\vec{u}, (-2;3,)$ et $\vec{v}(-1;-5)$.

Calculer :

$a)\vec{u}.\vec{v}$ $b)(4\vec{u}).\vec{v}$ $c)(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$

EXERCICE 5 :

On donne les points A(-3;-2) et B(1;3) et le vecteur $\vec{u}(,-5;4,)$.

Montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 6 :

A,B,C et D étant des points quelconques du plan, montrer les égalités suivantes.

$a)\vec{AB}.\vec{CD}=\vec{BA}.\vec{DC}.$

$b)\vec{AB}.\vec{AC}+\vec{AB}.\vec{EC}=\vec{AB}.\vec{ED}$

$c)\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}^2-\vec{BA}.\vec{BC}$

EXERCICE 7 :

On donne les points C et D tels que CD = 10 et H le milieu du segment [CD].

Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{MC}.\vec{MD}=-9$.

EXERCICE 8 :

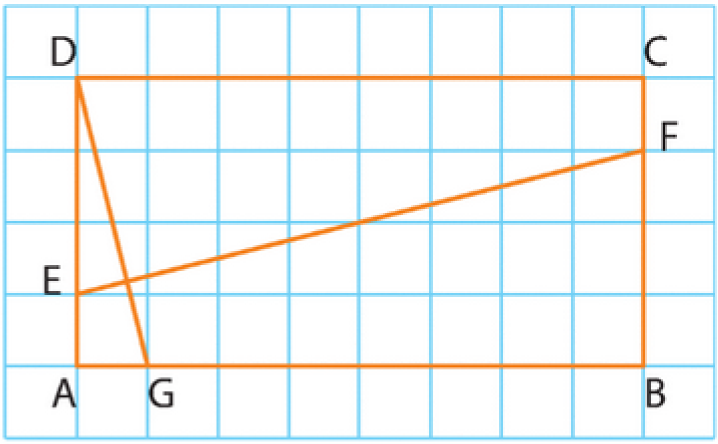
Dans un rectangle ABCD de longueur 8 et de largeur 4, on place les points E, F et G tels que :

$$\vec{AE}=\frac{1}{4}\vec{AD};\vec{AG}=\frac{1}{8}\vec{AB};\vec{CF}=\frac{1}{4}\vec{CB}.$$

1. Dans le repère (A ; G,E), donner les coordonnées de tous les points de la figure.

2. Calculer le produit scalaire $\vec{EF}.\vec{DG}$.

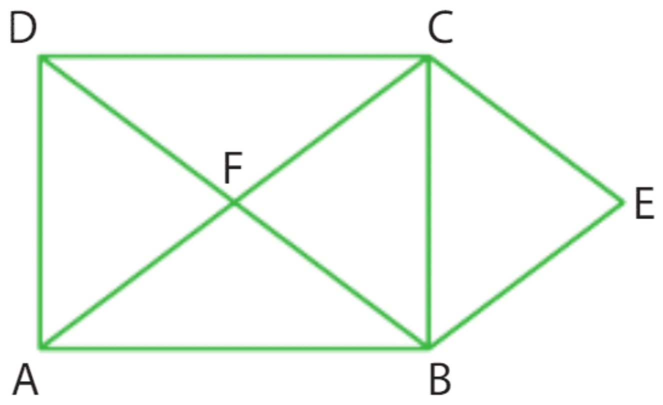
3. Que peut-on en déduire ?



EXERCICE 9 :

ABCD est un rectangle de centre F et E est le symétrique du point F par rapport la droite (BC). Calculer les produits scalaires suivants.

$a)\vec{BA}.\vec{BF}\,;b)\vec{CF}.\vec{CD}\,;c)\vec{AF}.\vec{AB}\,;d)\vec{AB}.\vec{BE}$



EXERCICE 10 :

Soient les vecteurs $\vec{u}(2;1)$, $\vec{v}(-3;-1)$ et $\vec{w}(1;4)$.

Calculer les produits scalaires suivants.

$a)\vec{u}.\vec{v}$
$b)\vec{w}.\vec{v}$
$c)\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$
$d)(-2\vec{u}).\vec{v}+3(\vec{v}.\vec{w})$

EXERCICE 11 :

On donne les vecteurs $\vec{u}(-3;4)$ et $\vec{v}(-8;-6)$.

Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux.

EXERCICE 12 :

Donner un vecteur directeur pour chacune des droites suivantes et en déduire qu'elles sont perpendiculaires.
a) Pour les droites d1 et d2 d'équations cartésiennes 2x-3y+4=0 et 3x+2y-1= 0.
b) Pour les droites d1et d2 d'équations cartésiennes x-y+3=0 et 2x+2y-1=0.
c) Pour les droites d1 et d2 d'équations y = —3x + 1 et -x+3y-1=0.

EXERCICE 13 :

Soient les vecteurs $\vec{u}(-2;3)$, $\vec{v}(-1;-5)$.

Calculer :

$a)\vec{u}.\vec{v}$
$b)(4\vec{u}).\vec{v}$
$c)(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$

EXERCICE 14 :

1. Soient les vecteurs $\vec{u}(-3;4)$, $\vec{v}(-8;-6)$.

Montrer que ces vecteurs sont orthogonaux.

2. On donne les points A(-3;-2) et B(1;3) et le vecteur $\vec{u}(-5;4)$.

Montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

EXERCICE 15 :

1. On considère les points A, B et C tels que AB = 3, AC = 4 et $\widehat{BAC}$ = 120°.

Déterminer la longueur BC.
2. On considère les points M, N et P tels que MN = 5, NP = 7 et MNP = 61°.

Déterminer la longueur MP.
3. Soit un triangle EFG tel que EF = 7, FG=6 et EG = 11.
Déterminer la valeur en degrés et arrondie à 0,1° de l'angle $\widehat{EFG}$.
4. Soit un triangle EDF tel que EF = 5, DF = 8 et ED = 9.
Déterminer la valeur en degrés et arrondie à 0,1° de l'angle $\widehat{EDF}$.

EXERCICE 16 :

soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux et tels que $\|\vec{u}\| = a$ et $\|\vec{v}\| = b$.

Exprimer en fonction de a et de b les produits scalaires suivants.

$$a)\vec{u}.(\vec{u}+\vec{v})$$
$$b)(2\vec{u}-3\vec{v}).\vec{v}$$
$$c)(\vec{u}+\vec{v})^2$$

EXERCICE 17 :

Soit les vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que : $\parallel \vec{u} \parallel = \|\vec{w} \ \| = a$ et $\vec{v} = 3\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants.

$$a)\vec{u}.\vec{v}$$
$$b)\vec{v}.(\vec{u}+\vec{w})$$
$$c)(\vec{u}+\vec{v})^2$$
$$d)(\vec{v}+\vec{w}).(\vec{u}+\vec{w})$$

EXERCICE 18 :

A, B, C et D étant des points quelconques du plan, montrer les égalités suivantes.

$$a)\vec{AB}.\vec{CD} = BA.\vec{DC}$$
$$b)\vec{AB}.\vec{CD}+\vec{AB}.\vec{EC} = \vec{AB}.\vec{ED}$$
$$c)\vec{AB}\,.\vec{AC} = \vec{AB} - \vec{BA} - \vec{BC}$$

EXERCICE 19 :

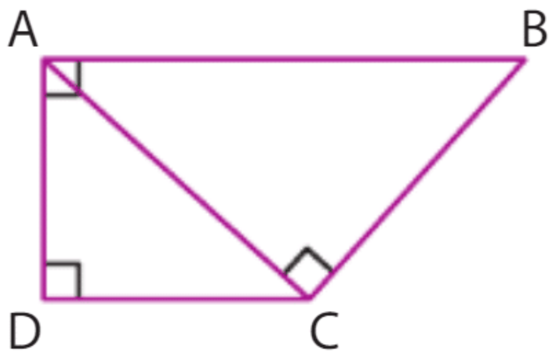
1.On donne les points A et B tels que AB = 12 et I le milieu du segment [AB].

Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{MA}\,.\vec{MB} = 4$.

2.On donne les points C et D tels que CD = 10 et H le milieu du segment [CD]. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\vec{MC}.\vec{MD} = -9$.

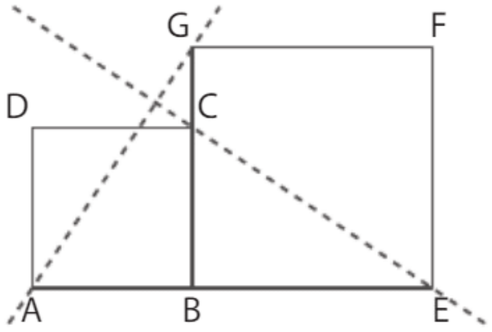
EXERCICE 20 :

On considère un trapèze rectangle ABCD tel que la diagonale [AC] est perpendiculaire au côté [BC]. En calculant de deux manières le produit scalaire $\vec{AB}.\,\vec{AC}$, démontrer que $AC^2 = AB \times CD$.



EXERCICE 21 :

On considère deux carrés ABCD et BEFG disposés comme sur la figure
ci-dessous tel que AB = 1 et BE = a.



A. Avec coordonnées
1. Dans le repère (A ; B, D), donner les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Démontrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

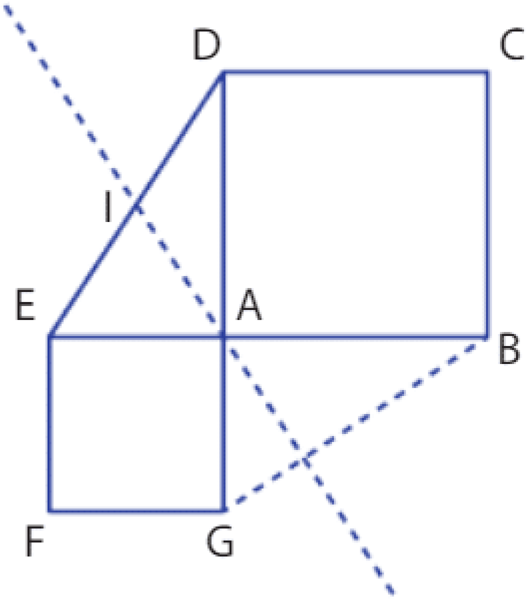
B. Sans coordonnées
1. Développer le produit scalaire $(\vec{AB} + \vec{BG}).(\vec{CB} + \vec{BE})$.
2. En déduire que $\vec{AG}.\vec{CE} = 0$ puis que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

EXERCICE 22 :

ABCD est un carré de côté a et AEFG est un carré de côté b avec D, A et G alignés, ainsi que B, A et E comme sur la figure ci-dessous.

Le point I est le milieu du segment [DE].

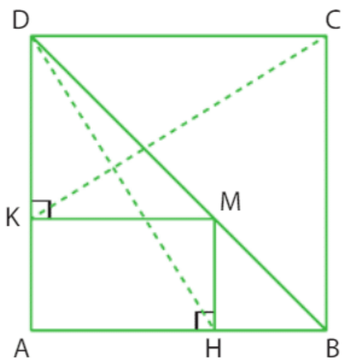
A. Sans coordonnées
1. Justifier que AD + AE = 2AI.
2. Développer le produit scalaire (AD + AE) . (BA + AG).
3. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.



B. Avec coordonnées
1. Dans le repère (A ; B, D) donner les coordonnées des points A, I, B et G.
2. En déduire que les droites (AI) et (BG) sont perpendiculaires.

EXERCICE 23 :

On considère un carré ABCD de côté 1 et un point M quelconque sur le segment [BD]. On construit les projetés orthogonaux H et K du point M respectivement sur
les côtés [AB] et [AD].



1. On veut démontrer que les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires par deux méthodes :
a) On utilisera le repère (A ; B, D) et on notera (x;y) les coordonnées du point M.
b) On calculera le produit scalaire :$\vec{CK}.\vec{DH}$ en décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.
2. Démontrer que les longueurs CK et DH sont égales :
a) avec des coordonnées.
b) sans coordonnées.

Consulter le corrigé.