Produit scalaire

Ce **cours de maths en première** sur le produit scalaire est à télécharger gratuitement au format PDF . Ainsi, il fait intervenir respectivement les notions suivantes :

- définition:

- norme d'un vecteur;

- cosinus et produit scalaire;

- vecteurs orthogonaux;

- bilinéarité du produit scalaire;

- symétrie;

- équation cartésienne et réduite d'une droite;

- équation d'un cercle.

I. Norme d'un vecteur

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans une base orthonormée du plan.

a. On appelle **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $||\vec{u}||$, le nombre $||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2}$.

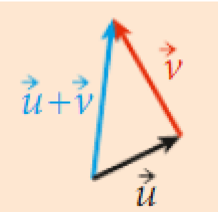
b. Si est k un nombre réel, alors $||k\vec{u}||=|\ k\ |\times\ ||\vec{u}||$.

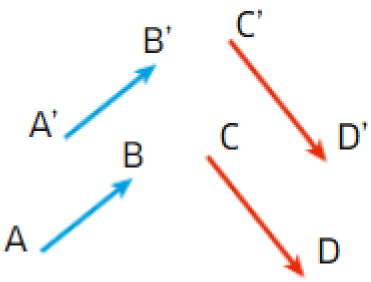
II. Critère d'orthogonalité de deux vecteurs

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de représentants respectifs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

On note dans ce cas $\vec{u} \perp \vec{v}$.





REMARQUE :

La définition ne dépend pas des représentants des vecteurs.
En effet, Si $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ et $\vec{CD} = \vec{C'D'}$ et que $(AB) \perp (CD)$ alors $(A'B') \perp (C'D')$.

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ (1).

REMARQUES :

L'égalité (1) provient du théorème de Pythagore.

L'égalité (1) est encore vérifiée si un des deux vecteurs est nul.
Ainsi, on considère que le vecteur nul $\vec{0}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou encore que $\vec{0}$ est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (X ; Y) et (X' ; Y') dans une base orthonormée du plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $XX' + YY' = 0$.

DÉMONSTRATION :

D'après la propriété précédente, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\parallel \vec{u}+\vec{v} \parallel^2 = \parallel \vec{u} \parallel^2 + \parallel \vec{v} \parallel^2$.

Or les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}(X+X';Y+Y')$.

L'égalité précédente nous donne :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\parallel \vec{u}+\vec{v} \parallel^2 = \parallel \vec{u} \parallel^2 + \parallel \vec{v} \parallel^2$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $(X+X')^2+(Y+Y')^2 = X^2+Y^2+X'^2+Y'^2$

soit $X^2+2XX'+X'^2+Y^2+2YY'+Y'^2 = X^2+Y^2+X'^2+Y'^2$

d'où $2XX'+2YY'=0$

Soit $2(XX'+YY')=0$

et donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $XX'+YY'=0$.

III. Définitions du produit scalaire

Définition
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (X ; Y) et (X ' ; Y ') dans une base orthonormée.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par $\vec{u}.\vec{v}$= XX' + YY'.

IV. Cas des vecteurs colinéaires ou orthogonaux

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v}$=0.
2. Nous avons $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.
3. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens , alors $\vec{u}.\vec{v} \geq 0$.
4. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v} \leq 0$.

V. Symétrie et bilinéarité

Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs et k un réel.
On dit que le produit scalaire est symétrique et bilinéaire.

C'est-à-dire que :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrique)

2. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}. = \vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ (linéarité)

3. $(k\vec{u})\,.\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$

VI. Produit scalaire et angle

Propriété :

Soit A, B et C trois points.

Nous avons le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC} = AB \times \ AC \times \ cos(\widehat{BAC})$.