Orthogonalité et équations de droites

L'équation est un élément important en mathématiques. Sa bonne maîtrise vous permettra de progresser tout au long de l'année.

I. Vecteurs directeurs et équation cartésienne

Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.Vecteur directeur d'une droite.

Définition :

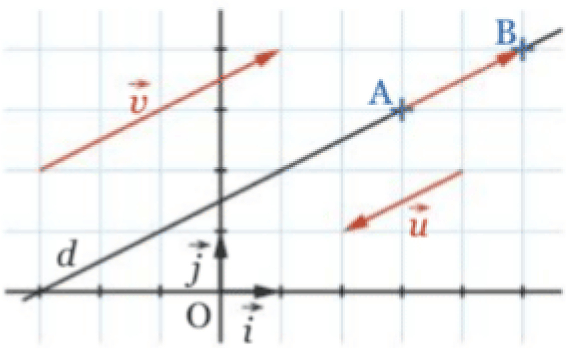
On appelle vecteur directeur d'une droite (d) tout représentant du vecteur $\vec{AB}$ où

A et B sont deux points quelconques et distincts de la droite (d).

EXEMPLE :

Dans l'image ci-dessous, les vecteurs $\vec{AB}(2;1)$, $\vec{u}(-2;-1)$ et $\vec{v}(4;2)$ sont des vecteurs

directeurs de la droite (d).



Application et méthode :

1. On calcule les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite.
2. La droite (BC) et sa parallèle ont les mêmes vecteurs directeurs, il suffi d'en prendre un représentant d'origine A.

EXEMPLE :

Soient trois points A(1;5), B(-3;2) et C(2;-1) dans un repère orthonormé.

1. Déterminer un vecteur directeur de la droite (BC).
2. Détailler la construction de la parallèle à (BC) passant par A.

2. Equation cartésienne de droite.

Théorème :

Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x;y)$

d'une droite vérifient une relation $ax+by+c=0$ où a, b et c sont des nombres réels.

DÉMONSTRATION :

Soient $P(x_P;y_P)$ et $Q(x_Q;y_Q)$ deux points d'une droite (d).

Alors, pour tout point $M(x;y)$ appartenant à (d), nous avons :

les vecteurs $\vec{PM}(x-x_P;y-y_P)$ et $\vec{PQ}(x_Q-x_P;y_Q-y_P)$ sont colinéaires.

On a donc $det(\vec{PM};\vec{PQ})=0$.

C'est-à-dire $(x-x_P)(y_Q-y_P)-(y-y_P)(x_Q-x_P)=0$.

$x(y_Q-y_P)-x_P(y_Q-y_P)-y(x_Q-x_P)+y_P(x_Q-x_P)=0$

donc $(y_Q - y_P)x + (x_P - x_Q)y + (y_P x_Q - x_P y_Q) = 0$.

En posant $a = y_Q - y_P$; $b = x_P - x_Q$ et $c = y_P x_Q - x_P y_Q$,

on a donc l'équation de la droite (d) qui est de la forme $ax + by + c = 0$.

Définition :

La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle une **équation cartésienne** de la droite (d).

Propriété :

Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un **vecteur directeur** de la droite (d) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

EXEMPLE :

Si la droite (d) a pour équation cartésienne $5x + 4y - 11 = 0$, alors le vecteur $\vec{u}(-4; 5)$

est un vecteur directeur de cette droite.

II. Positions relatives de droites

1.Droites parallèles ou sécantes

Théorème :

Soient deux droites (d) et (d') d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels.

Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, $ab' - a'b \neq 0$.

PREUVE :

Des vecteurs directeurs des droites (d) et (d') sont, respectivement, $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{v}(-b';a')$.

Les droites (d) et (d') sont sécantes si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Autrement dit, si le déterminant de ces deux vecteurs est non nul.

Soit, $-ba'-(a(-b'))=-ba'+ab'=ab'-a'b\neq 0$.

2. Droites sécantes et systèmes d'équation

Théorème :

Lorsque deux droites sont sécantes, les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection

sont solution du système :

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

3. Droites perpendiculaires

Théorème :

Soient deux droites (d) et (d') d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ où a,b,c,a',b',c' sont des nombres réels.

Les vecteurs directeurs des droites (d) et (d') sont, respectivement, $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{v}(-b';a')$.

Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v}=0$ soit $aa'+bb'=0$.

PREUVE :

Les vecteurs directeurs des droites (d) et (d') sont, respectivement, $\vec{u}(-b;a)$ et $\vec{v}(-b';a')$.

Les droites sont perpendiculaires si, et seulement si, ces deux vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Ce qui revient à dire que le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, soit :

$\vec{u}.\vec{v}=0$

Ce qui équivaut à :

$-b\times\ (-b')+a\times\ a'=0$ soit $aa'+bb'=0$.