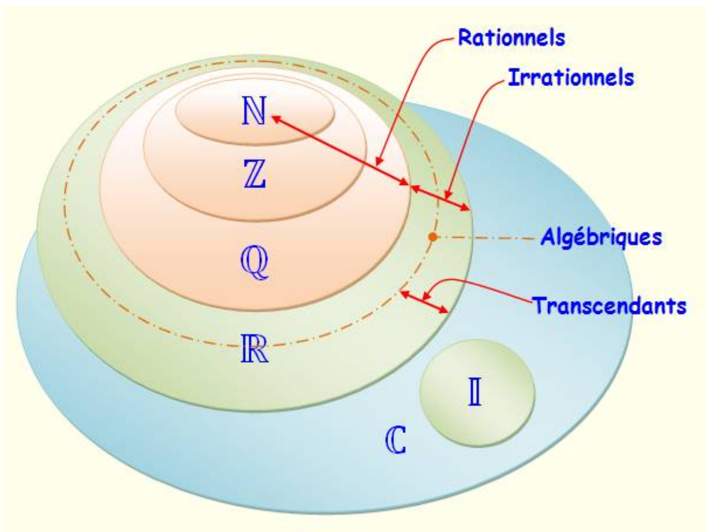
Nombres complexes

Théorème et définition :

Il existe un ensemble de nombres noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés les **nombres complexes**, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels;
- les règles de calculs dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $i^2 = -1$;
- tout nombre complexe z peut s'écrire de **manière unique** sous la forme $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels (cette écriture s'appelle l'**écriture algébrique** du nombre complexe z).Le nombre x est appelé **partie réel (notée Re(z))** du nombre z et le nombre y est appelé **partie imaginaire (notée Im(z))** du nombre complexe z.



EXEMPLE :

Le nombre $z=\sqrt{3}+2i$ est un nombre complexe.

$\sqrt{3}$ est sa partie réelle et 2 est sa partie imaginaire.
Propriétés :

- z est un nombre réel si et seulement si Im(z)=0.
- z est un imaginaire pur si et seulement si Re(z)=0.

<u>II.Conjugué d'un nombre complexe</u>

Définition :

On considère z un nombre complexe dont la forme algébrique est z=x+iy avec x et y deux nombres réels.On appelle **conjugué du nombre z**, le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que $\overline{z}=x-iy$.

EXEMPLE :

$\overline{1+3i}=1-3i$ et $\overline{2-5i}=2+5i$.
Propriétés :

On considère deux nombres complexes z et z'.Nous avons les propriétés suivantes :

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{(\frac{1}{z})}=\frac{1}{\overline{z}}$ avec $z\neq\ 0$
- $z\in\ \mathbb{R}\Leftrightarrow\ \overline{z}=z$
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow\ \overline{z}=-z$

- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$
- $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{(kz)} = k\,\overline{z}$ avec $k \in \mathbb{R}$

III.Représentation graphique des nombres complexes

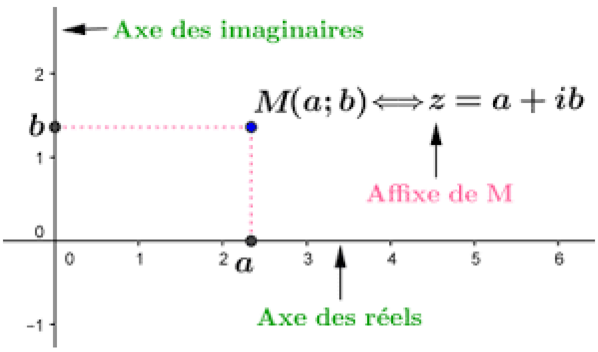
1. Affixe d'un point

Définition :

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On associe à tout nombre complexe z=x+iy , on associe le point M(x;y).

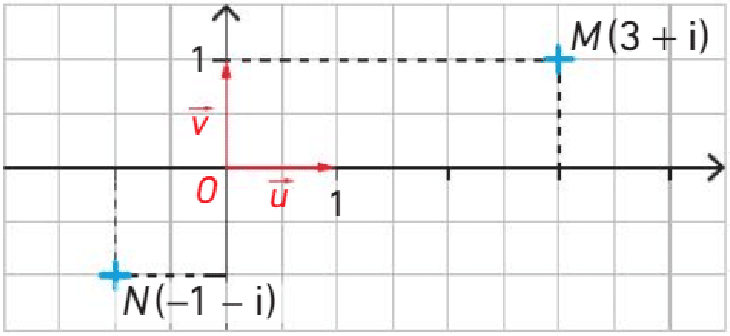
M est appelé le **point image de z** et z est appelé l'**affixe du point M** dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note M(z) qui se lit **le point M d'affixe z**.



EXEMPLE :

Le point M d'affixe $z = 3 + i$ a pour coordonnées $M(3, 1)$.

Le point N d'affixe $z = -1 - i$ a pour coordonnées $M(-1, -1)$.



2.Affixe d'un vecteur

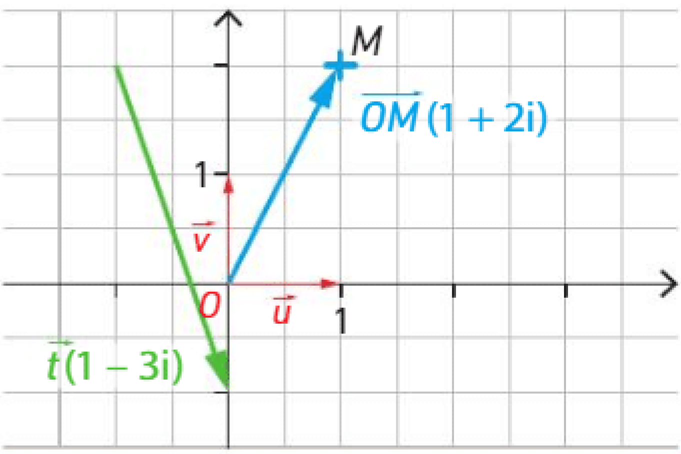
Définition :

A tout nombre complexe z affixe du point M(x,y), on associe le vecteur $\vec{w} = \vec{OM}$ tel que $\vec{w}(x;y)$.et on note $\vec{w}(z)$, le vecteur $\vec{w}$ d'affixe z.

EXEMPLES:

Le vecteur $\vec{OM}$ d'affixe z=1+2i a pour coordonnées $\vec{OM}(1;2)$.

Le vecteur $\vec{t}$ d'affixe 1-3i a pour coordonnées $\vec{t}(1;-3)$.



Propriétés :

On considère deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ d'affixes respectives z etz'.Le vecteur $\vec{w}+\vec{w'}$ a pour affixe $z+z'$.

Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz avec $k \in \mathbb{R}$.

3.Les équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété :

On considère un nombre réel a.

- Si a>0, les solutions sont $z=\sqrt{a}$ et $z=-\sqrt{a}$;
- Si a<0, les solutions sont $z=i\sqrt{-a}$ et $z=-\sqrt{-a}$;
- Si a=0, la solution est z=0.

EXEMPLE :

L'équation $z^2=-4$ admet comme solutions dans $\mathbb{C}$: $z=2i$ et $z=-2i$.

4.Les équations du type az²+bz+c=0

Propriété :

On considère des nombres réels a,b et c avec $a\neq\ 0$.On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$ de discriminant $\Delta\ =b^2-4ac$.

- Si Δ>0, les solutions sont $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si Δ<0, les solutions sont $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$;
- Si Δ=0, la solution est $z\ =\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

EXEMPLE :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + 4z + 5 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$.

Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-4 + i\sqrt{4}}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

et $z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-4 - i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$.

5.Factorisation d'un trinôme du second degré

Propriété:

On considère des nombres réels a,b et c avec $a \neq 0$.Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = az^2 + bz + c$.

On note z_1 et z_2 les deux solutions de $P(z) = 0$ dans (avec éventuellement z_1= z_2 lorsque Δ=0).

On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

EXEMPLE :

Reprenons l'exemple précédent, $P(z) = z^2 + 4z + 5 = (z + 2 - i)(z + 2 + i)$.