Nombre complexes

EXERCICE 1 :

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + 2i$
$z_2 = 3 + i$
$z_3 = 3$
$z_4 = 6i$
$z_5 = \frac{-i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
$z_6 = \frac{1}{3}(5 + 2i)$

EXERCICE 2 :

On considère les deux nombres complexes suivants :

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

2. Déterminer les écritures sous formes algébrique, exponentielle et trigonométrique de $z_1 z_2$.

3. En déduire la valeur exacte du cosinus et sinus suivants :

$cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$.

EXERCICE 3 :

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = (1+i)+(-8+4i)$
$z_2 = (3+i)(5-2i)$
$z_3 = 5i-(3+2i)$
$z_4 = 2(5-i)+3(i-4)$
$z_5 = (i+2)^2-(3-5i)$
$z_6 = (\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2$
$z_7 = \frac{5+i}{3+2i}$

EXERCICE 4 :

Dans le plan complexe, les points A,B et C ont pour affixe respectif
$z_A = 3+2i; z_B = -5+2i; z_C = -3i$

1.Placer les points A, B et C.

2. Déterminer les affixes des points A' et B' milieux respectifs des segments [BC] et [AC].

3. déterminer l'affixe du point G défini par $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$

EXERCICE 5 :

Dans le plan complexe A,B,C et D sont les points d'affixes :

$z_A = 5+5i; z_B = 3+2i; z_C = 9-2i; z_D = 11+i$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{BC}$.
2. Déterminer un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 6 :

1.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

b. Donner une forme exponentielle de chacun des solutions.

2. A et M sont les points d'affixes respectives $a = \sqrt{3}+i; m = \sqrt{3}-i$.

a. Placer les points A et M en indiquant une méthode de construction.

b. On appelle B et C les points d'affixes respectives b=ia et c=ib.

Calculer b et c sous forme algébrique, puis placer B et C.

c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

d. Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un carré. Placer ce point D sur la figure.

EXERCICE 7 :

1)Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes :

$2+4i; 2i; -1-3i; -4; 2+\sqrt{3}; -\sqrt{5}i$

2)Parmi ces complexes, lesquels sont des réels ?

Lesquels sont imaginaires purs?

EXERCICE 8 :

Ecrire les nombres complexes sous forme algébrique.

$z_1 = 2i + 6 - 7i$

$z_2 = 3 - (1+2i)$

$z_3 = -5(3-i)$

$z_4 = -4(1+2i)$

$z_5 = 1 + i^2$

$z_6 = i(3+2i)$

$z_7 = 3(5-i) + i(-1+5i)$

$z_8 = i^3$

$z_9 = i^4$

$z_{10} = (1+i)(1-i)$

$z_{11} = \dfrac{4+6i}{2}$

$z_{12} = \dfrac{2-3i}{5}$

$z_{13} = \dfrac{10+5i}{1-4i^2}$

EXERCICE 9 :

Déterminer le complexe conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 5 + 2i$

$z_2 = -4$

$z_3 = 7i$

$z_4 = -2 - 8i$

$z_5 = 3i - 11$

$z_6 = \dfrac{4 - 6i}{2}$

EXERCICE 10 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations proposées.

On donnera les solutions sous forme algébrique.

$1) z - 2 + 4i = 0$

$2) 5z + 2i = 4z - 5 + i$

$3) iz + 1 - i = 0$

$4) - 2z + 3 = iz + 1 - i$

$5) (2z - 4 + i)(z + 3i) = 0$

$6) (2z - 4)(iz + 2) = 0$

$7) z^2 = -16$

$8) z^2 = -81$

EXERCICE 11 :

Associer chaque complexe au point image qui lui correspond.

$z_1 = 2 + 2i$

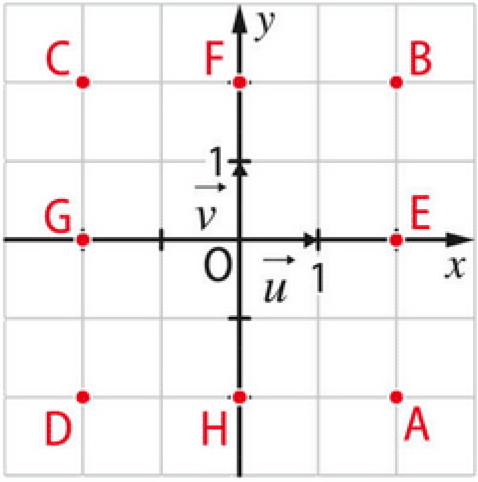
$z_2 = -2 - 2i$

$z_3 = 2$

$z_4 = 2i$

$z_5 = -2$

$z_6 = -2 + 2i$



EXERCICE 12 :

Associer chaque vecteur à l'affixe qui lui correspond.

$z_1 = 2 + 2i$

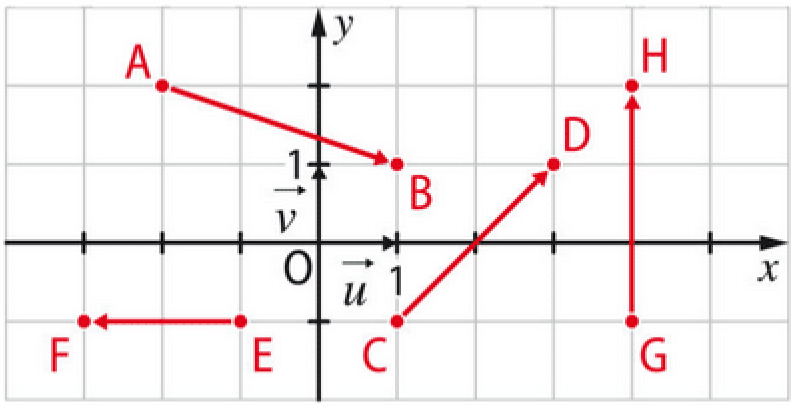
$z_2 = -2 + 2i$

$z_3 = 3i$

$z_4 = 3 - i$

$z_5 = -2$

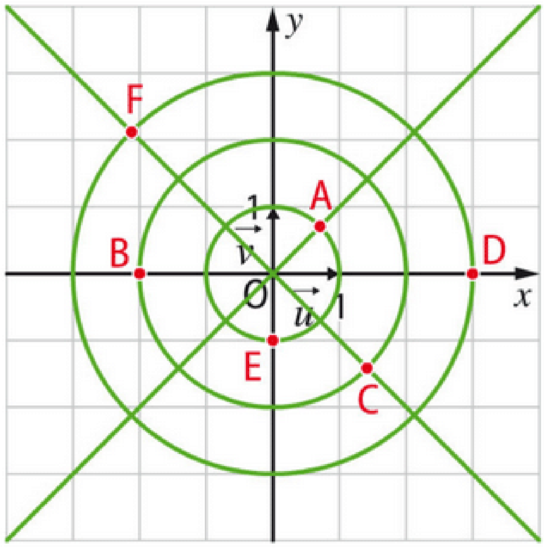
$z_6 = 1 - i$



EXERCICE 13 :

1)Déterminer graphiquement les distances OA, OB, OC, OD, OE et OF.

2)En déduire le module de l'affixe de chacun des points A, B, C, D, E et F.



EXERCICE 14 :

Parmi les écritures proposées ci-dessous, dire lesquelles sont des formes trigonométriques d'un nombre complexe.

$z_1 = \sqrt{3}(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$

$z_2 = -3(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$

$z_3 = 2(cos(\frac{5\pi}{6}) + isin(-\frac{5\pi}{6}))$

$z_4 = 5(cos0 + isin0)$

EXERCICE 15 :

Soit le nombre complexe z_1 de module 2 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$ et le nombre complexe z_2 de module 4 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.

1)Déterminer $\mid z_1 z_2 \mid$, $\mid \frac{z_1}{z_2} \mid$ et $\mid z_1^5 \mid$.

2)Déterminer $arg(z_1 z_2)$, $arg(\frac{z_1}{z_2})$ et $arg(z_1^5)$.

EXERCICE 16 :

Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$z_1 = e^{i\pi}$; $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $z_4 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

EXERCICE 17 :

Démontrer que les nombres complexes suivants sont égaux :

$z = 5i; z' = \dfrac{10+5i}{1-2i}$

1. En calculant la différence z'-z.

2. En calculant le quotient $\dfrac{z'}{z}$.

EXERCICE 18 :

Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$z = \dfrac{3+6i}{3-4i}$

EXERCICE 19 :

On donne $z_1 = -1+3i; z_2 = 4-i$.

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$a)\ z_1^2 - 2z_2$
$b)\ z_1 z_2^2$
$c)\ \dfrac{z_1}{z_2}$
$d)\ \dfrac{z_1}{z_2}$
$, e)\ \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$
$f)\ , \dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2}$

EXERCICE 20 :

Calculer la somme $S = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2017}$.

EXERCICE 21 :

On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer j^2, j^3 puis j^n suivant les valeurs du nombre entier naturel n.
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Calculer la somme $S' = 1 + j + j^2 + j^3 + ...j^{2017} + j^{2018}$.

EXERCICE 22 :

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^2 - 4z + 5$.

Vérifier que $P(2+i) = 0 \, et \, P(2-i) = 0$.

EXERCICE 23 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A,B,C et H d'affixes respectives :
$a = -3 - i; b = -2 + 4i; c = 3 - i; h = -2$.

1.a) Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

b) Montrer que V est le centre du cercle ξ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle ξ.

c) Calculer, sous forme algébrique, le nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.

En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

2. Dans la suite de cet exercice, on admet que H est l'orthocentre du triangle ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC.

a. On note G le centre de gravité du triangle ABC.

L'affixe du point G vérifie $g = \dfrac{1}{3}(a+b+c)$.

Placer le point G sur la figure.

b) Montrer que le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, noté V, sont alignés. Le vérifier sur la figure.

c) On note A' le milieu de [BC] et K celui de [AH]. Déterminer la nature du quadrilatère KHA'V.

Remarque : dans un triangle, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle sont alignés sur une droite (d) appelée droite d'Euler.

EXERCICE 24 :

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, et on considère les points A, B et C distincts situés sur le cercle de centre O et de rayon r.
Les points A’, B’ et C’ sont les images de A, B et C par la rotation de centre O et d’angle$\dfrac{\pi}{3}$.

Les points U, V et W sont les milieux des segments [A'B], [B'C], [C'A] ; montrer que le triangle UVW est équilatéral.

EXERCICE 25 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, et on considère l'application
f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)=\dfrac{z+i\overline{z}}{2}$.

1. Montrer que l'ensemble (d) des points M dont l'affixe z vérifie f(z) = z est une droite.
2. Montrer que le nombre $\dfrac{f(z)-z}{1-i}$est réel.
3. En déduire que M' appartient à la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}-\vec{v}$
4. Montrer que pour tout nombre complexe z, $f(f(z))=f(z)$.
5. Déduire des questions précédentes que M' est le point d'intersection des deux droites (d) et
Δ.
6. Caractériser géométriquement l'application f.

EXERCICE 26 :

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A le point d'affixe 1 et par C le cercle de centre A et de rayon 1.

PARTIE A :

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $z_E=1+z_B^2$.

Montrer que le point B appartient au cercle C.
Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{AF},\vec{AB})$. Placer le point B.
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes z_B-z_A et z_E-z_A.
En déduire que les points A, B et E sont alignés. Placer le point E.

PARTIE B :

Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq\ 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z'=1+z^2$.
Pour $z\neq\ 0$ et $z\neq\ 1$, donner, à l'aide des points A, M et M' une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

EXERCICE 27 :

On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, et l'application
f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z^3-3z^2+3z.

On considère les points B et C d'affixe respectives i et $i\sqrt{3}$.

1. Calculer les affixes des points images de O, B et C par f.
2. Placer les points B et C et leur image B' et C' .
3. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?
4. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation : $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$.

5. En déduire que f possède trois points invariants dont on déterminera les affixes.
6. Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$, $z' - 1 = (z-1)^3$.

EXERCICE 28 :

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé$(O\,;\vec{u},\vec{v})$.
On considère le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe z , le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe 1. Soit f l'application de P privé de A dans P, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+4}{\overline{z}-2}$.
Déterminer les points invariants par f .