Matrices et graphes

le chapitre sur les matrices est très instructif et nécessite une certaine concentration de la part de l'élève. Ce cours lui permettra de développer des compétences nouvelles.

I. La notion de matrice.

Soient m, n et p trois entiers naturels non nuls.

1.Notion de matrice et opérations.

Définition :

Une matrice de taille (ou format) $n \times\ p$ est un tableau de nombres réels n lignes et p colonnes.

EXEMPLE :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0{,}5 & 4 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes donc de taille $2 \times\ 3$.

Définitions :

Lorsque n = 1, on dit que M est une **matrice ligne**, formée d'une seule ligne.
Puis, lorsque p = 1, on dit que M est une **matrice colonne**, formée d'une seule colonne.
Et lorsque n = p, on dit que M est une **matrice carrée** d'ordre n.
Une **matrice diagonale** est une matrice carrée, dont tous les termes sont nuls sauf lorsque i=j.
La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n.
La matrice nulle de taille $n \times\ p$, notée $O_{n,p}$, est la matrice de taille $n \times\ p$, dont tous les coefficients sont nuls.

EXEMPLES :

1. $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{9} & -15 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

3. $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ désignent respectivement la matrice identité et la matrice nulle d'ordre 3.

Définition :

Deux matrices A et B de taille $n \times p$ sont **égales** lorsque, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et $j \in \{1, 2, ..., p\}$

on a $(a_{ij}) = (b_{ij})$.

Définition :

Une matrice carrée d'ordre n sont **symétrique** lorsque, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ et $j \in \{1, 2, ..., n\}$

on a $(a_{ij}) = (a_{ji})$.

EXEMPLE :

La matrice suivante est symétrique.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

2. Opérations sur les matrices.

Définitions :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de taille $n \times p$.

1. La s**omme des matrices A et B**, notée A + B, est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$
   telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et$1 \leq j \leq p$, on $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

2. Le produit de la matrice A par un réel λ, noté λA, est la matrice $M = (m_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a $m_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices de même taille et α et β deux réels.

1. A+ B = B + A (commutativité de la somme de matrices)
2. A+(B +C) = (A+ B)+C (associativité de la somme de matrices)
3. $1 \times A = A \times 1 = A$
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5. $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$

Définition :

On appelle matrice opposée de A la matrice $M = (-1)A$, notée $-A$, telle que,

pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a $m_{i,j} = -a_{i,j}$.

De plus, on note $A - B$ la matrice $A + (-B)$.

EXEMPLES :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ deux matrices de taille 2×3.

On a $A + B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

$2A = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$; $3B = 3 \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -9 & -9 & -3 \end{pmatrix}$ et

$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ -9 & -9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -19 & -6 \\ 13 & 15 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $L = (l_{1,1}, l_{1,2}, ..., l_{1,n})$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix}$$

une matrice colonne de taille matrice colonne de taille $n \times 1$.

Alors le produit $L \times C$ est le nombre réel définit par :

$$L \times C = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & \ell_{1,2} & \cdots & \ell_{1,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix} = \ell_{1,1} \times c_{1,1} + \ell_{1,2} \times c_{2,1} + \ldots + \ell_{1,n} \times c_{n,1}$$

EXEMPLE :

Si $L = (4 \;\; 2 \;\; 1)$ et $C = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, alors $L \times C = 4 \times 8 + 2 \times (-3) + 1 \times (-2) = 24$.

3.Produit de deux matrices.

Définition :

Si A est une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$, le **produit des matrices** A et B, noté $A \times B$ ou AB, est la matrice $C = (c_{i,j})$ de taille $m \times p$ telle que,

pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} \times b_{k,j}$.
Autrement dit, l'élément $c_{i,j}$. est le produit de la i-ème ligne de A par la j-ième colonne de B.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices et λ un nombre réel.

Sous réserve de définition des produits et des sommes, on a :

1. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
2. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
4. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda AB$
5. $I_n \times A = A \times I_n = A$

Définition :

Soient A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul.
La **puissance k-ième** de A, notée A^k, est la matrice $A^k = A \times A \times ... \times A$ (k fois).

4.Inverse d'une matrice et résolution de système.

Définition :

Une matrice carrée A de taille n est **inversible** lorsqu'il existe une matrice carrée B de taille n telle que $A \times B = B \times A = I_n$.

Définition :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Le déterminant de A est le réel, noté det(A), défini par $det(A) = ad - bc$.

Propriété :

Une matrice carrée est **inversible** si, et seulement si, son **déterminant est non nul.**

En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Propriété :

Soient A une matrice carrée de taille n et X et B deux matrices colonnes à n lignes.
Si A est inversible, alors le système d'écriture matricielle AX = B admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1} \times B$.

EXEMPLE :

Si $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $AX = \begin{pmatrix} 6x + 2y \\ -8x + 5y \end{pmatrix}$ donc le système $\begin{cases} 6x + 2y & = & 3 \\ -8x + 5y & = & 12 \end{cases}$ peut s'écrire $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

II. Les graphes.

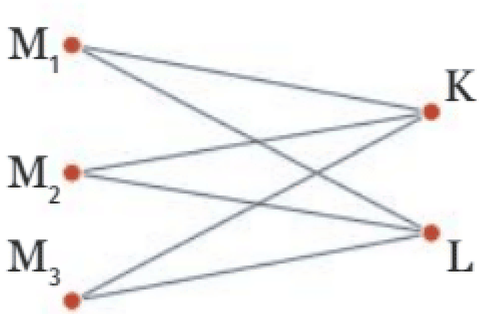
Définitions :

Un **graphe** est une représentation composée de **sommets** (des points) reliés par des arêtes (segments).
Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont munies d'un sens de parcours.

L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, sans tenir compte de leur éventuel sens de parcours.

EXEMPLE :

Le graphe ci-dessous est d'ordre 5.
Les sommets K et L sont de degré 3.
Les sommets M , M et M, sont de degré 2.

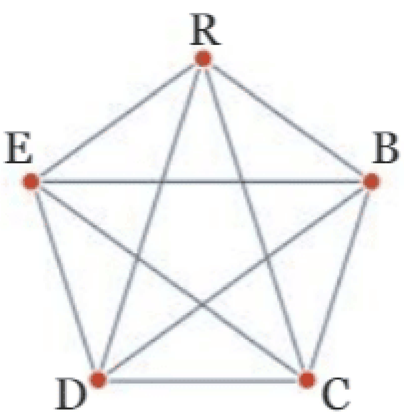


Définitions :

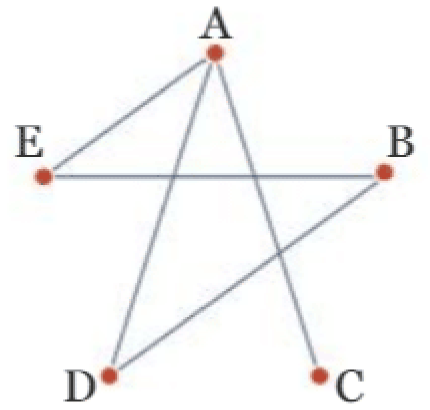
Deux sommets sont **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête.
Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

EXEMPLES :

1. Le graphe ci-dessous est complet car tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

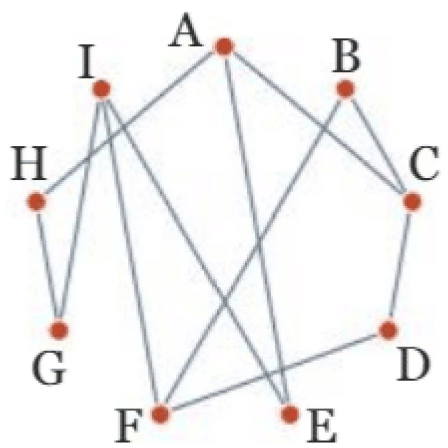


2. Le graphe ci-dessous n'est pas complet car les sommets A et B, par exemple, ne sont pas adjacents.



Définition :

Pour un graphe non orienté, une **chaîne** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus).
La **longueur d'une chaine** est le nombre d'arêtes la composant.
Pour un graphe orienté, un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives reliant deux sommets (éventuellement confondus) en tenant compte du sens de parcours des arêtes.



III. Application du calcul matriciel aux graphes.

Définition :

Soit n un entier naturel non nul. On considère un graphe d'ordre n (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n, puis rangés dans l'ordre croissant.
La **matrice d'adjacence** de ce graphe est la matrice carrée de taille n, dont le

coefficient $a_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes partant du sommet i pour arriver au sommet j.

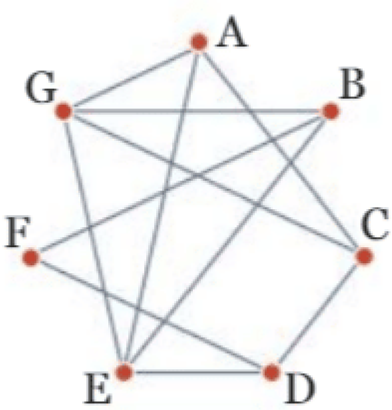
EXEMPLE :

En notant M la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous obtenue en rangeant

les sommets dans l'ordre alphabétique.

Nous avons :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Propriété :

Soient n et k deux entiers naturels non nuls et M la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre n, dont les sommets sont numérotés de 1 à n et rangés dans l'ordre croissant Le terme de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de la matrice M^k donne le nombre de chaînes (ou de chemins) de longueur k reliant le sommet i au sommet j.

EXEMPLE :

En reprenant l'exemple précédent, on a $\mathrm{M}^4 = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 13 & 20 & 16 & 5 & 23 \\ 20 & 20 & 12 & 18 & 14 & 4 & 18 \\ 13 & 12 & 22 & 6 & 27 & 12 & 17 \\ 20 & 18 & 6 & 21 & 8 & 2 & 20 \\ 16 & 14 & 27 & 8 & 35 & 17 & 24 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & 17 & 10 & 11 \\ 23 & 18 & 17 & 20 & 24 & 11 & 31 \end{pmatrix}$.

Il existe donc 27 chaînes de longueur 4 reliant le sommet C au sommet E.

On a $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ donc il n'existe aucune chaîne de longueur 2 reliant le sommet B au sommet F.