Logarithme népérien

Le logarithme naturel ou népérien est dit de base e car ln(e) = 1. De plus, le logarithme népérien d'un nombre x peut aussi être défini comme la puissance à laquelle il faut élever e pour qu'on puisse obtenir x. En outre, la fonction logarithme népérien est ainsi la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

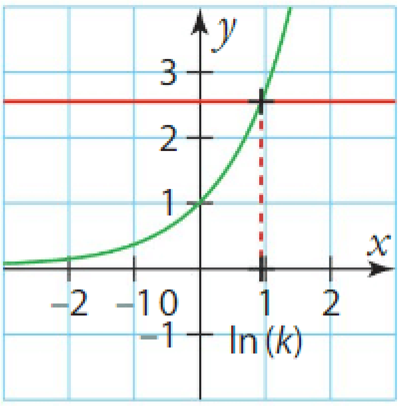
On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation ex = a

I. Fonction logarithme népérien, fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Propriétés : la fonction exponentielle.

La **fonction exponentielle** est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Nous avons $\lim_{xarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{xarrow +\infty} e^x = +\infty$.

L'équation $e^x = k$, avec $k \in \mathbb{R}^{+*}$, admet alors une unique solution dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.



Définition : fonction logarithme népérien.

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée ln, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel strictement positif x associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$

d'inconnue y.

On définit ainsi $y = ln\,(x)$.

EXEMPLE :

A l'aide de la touche ln de la calculatrice, on peut vérifier que $ln\,(2) \simeq 0,693$.

REMARQUE :

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on peut noterlnx au lieu de $ln(x)$.

Propriétés : fonction logarithme népérien.

- Pour tout réel $x > 0, e^{lnx} = x$
- Pour tout réel $x, ln(e^x) = x$
- $ln1 = 0$
- $lne = 1$
- $ln(\frac{1}{e}) = -lne = -1$

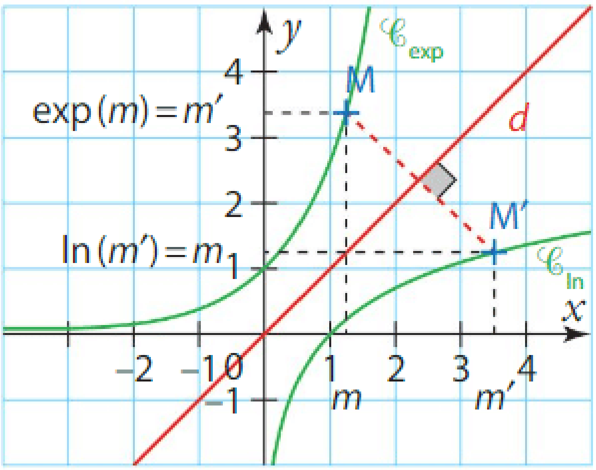
EXEMPLE :

$ln(e^3) = 3$ et $e^{ln3} = 3$.

II. Courbes des fonctions logarithme népérien et exponentielle

Propriété :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation y= x.



III. Sens de variation de la fonction logarithme népérien

Propriété :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.
$0 < a < b \Leftrightarrow 0 < e^{ln(a)} < e^{ln(b)}$.

On en déduit $ln\,(a) < ln\,(b)$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

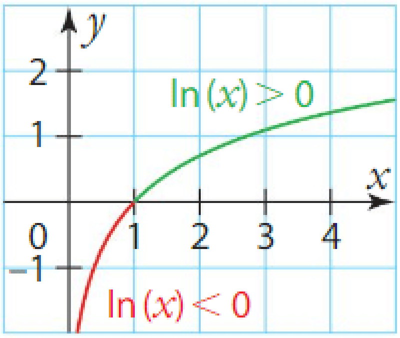
Pour tous réels a > O et b > O : $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$ $et\,ln\,(a) < ln\,(b) \Leftrightarrow a < b$.

PREUVE :

• $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow e^{ln(a)} = e^{ln(b)} \Leftrightarrow a = b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
• $ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow e^{ln(a)} < e^{ln(b)} \Leftrightarrow a < b$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE :

$ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.



IV. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien

1.Relation fonctionnelle.

Propriété :

Pour tous réels a et b strictement positifs :
$ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.

PREUVE :

Pour tous réels a et b strictement positifs, $e^{ln(ab)} = ab = e^{ln(a)} \times e^{ln(b)} = e^{ln(a)+ln(b)}$
soit $e^{ln(ab)} = e^{ln(a)+ln(b)}$.
On a donc $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.

REMARQUES :

1. On retrouve la particularité que cette fonction transforme les produits en sommes.
2. Cette formule se généralise à un produit de plusieurs facteurs.

EXEMPLES :

$ln\,(10) = ln\,(5 \times 2) = ln\,(5) + ln(2)$
$ln\,(30) = ln\,(2 \times 3 \times 5) = ln\,(2) + ln\,(3) + ln\,(5)$

2. Logarithme d'un inverse et d'un quotient.

Propriété :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$ et $ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)$.

PREUVE :

Pour tout nombre réel a strictement positif :

$ln(1) = ln(\frac{a}{a}) = ln(a \times \ \frac{1}{a}) = lna + ln(\frac{1}{a})$ d'où $ln(a) + ln(\frac{1}{a}) = 0$

ainsi, nous avons $ln(\frac{1}{a}) = -ln(a)$.

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs:

$ln(\frac{a}{b}) = ln(a \times \ \frac{1}{b}) = ln(a) + ln(\frac{1}{b}) = ln(a) - ln(b)$.

3. Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée.

Propriété :

Pour tout réel a strictement positif, et pour tout entier relatif n :

$ln(a^n) \ = \ nln(a)$ et $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)$.

EXEMPLES :

$ln(25) = ln(5^2) = 2ln(5)$.

$ln(16) - 2ln(2) + ln(8) = ln(2^4) - 2ln(2) + ln(2^3) = 4ln(2) - 2ln(2) + 3ln(2) = 5ln(2)$

$ln(\sqrt{6}) = ln(6^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}ln(6)$.

V. Étude de la fonction logarithme népérien

1.Dérivée de la fonction logarithme népérien.

Propriété :

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $ln'(x)=\frac{1}{x}$.

PREUVE :

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=e^{ln(x)}$.
La fonction ln étant dérivable sur $]0;+\infty[$ et la fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$,

f est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.
Sachant que $(vou)'=(v'ou)\times\ u'$, en posant $v(x)=e^x$ et $u(x)\ =\ ln(x)$, on a alors :
$f'(x)=e^{ln(x)}\times\ ln'(x)=x\times\ ln'(x)$.
On a également $f(x)=x$ donc $f'(x)=1$.
Par conséquent, on a $x\times\ ln'(x)=1\Leftrightarrow\ ln'(x)=\frac{1}{x}$.

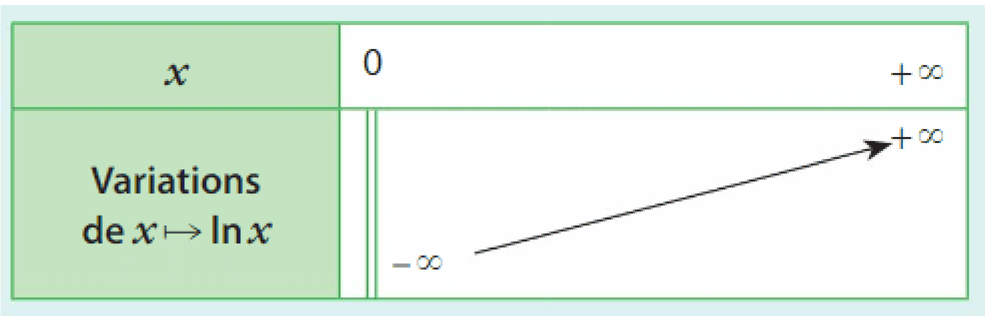
2.Limites aux bornes de l'ensemble de définition.

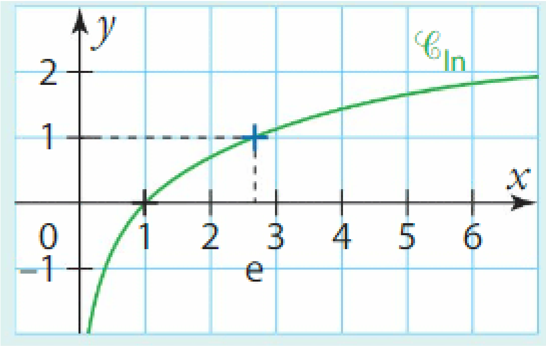
Propriétés :

$\lim_{xarrow+\infty} ln(x)=+\infty$ et $\lim_{xarrow\,0} ln(x)=-\infty$

3.Tableau de variations de ln et courbe représentative.

Propriété :





4.Croissance comparée.

Propriété :

$\lim\limits_{xarrow\,+\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0\,;\ \lim\limits_{xarrow\,0} xlnx = 0;\ \lim\limits_{xarrow\,+\infty} \dfrac{lnx}{x^n} = 0\,(n \in \mathbb{N}^*)\,;\ \lim\limits_{xarrow\,0} x^n lnx =$
$0\,(n \in \mathbb{N}^*)$

5. Fonction composée ln (u).

Propriété : dérivée de ln u.

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction lnu est alors dérivable sur I et $(ln\,u)' \ = \dfrac{u'}{u}$

Propriété : sens de variation de ln(u).

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
Les fonctions u et lnu ont le même sens de variation sur I.

PREUVE :

u étant strictement positive, le signe de $\dfrac{u'}{u}$ est le même que celui de $u'u'$.

Or $(ln\, u)' = \dfrac{u'}{u}$, ce qui signifie que le signe de $(lnu)'$ est le même que celui de u',

c'est-à-dire que u et lnu ont même sens de variation.