Limite de suites et fonctions

La limite de suites et fonctions en terminale est très importante en mathématique. De plus, celle-ci nécessite une pratique régulière de différents exercices sur le chapitre.

En outre, avec un cours de maths en terminale à télécharger gratuitement au format PDF, vous serez plus à l'aise.

De plus, une étude comparative des suites numériques et des fonctions est essentielle pour les élèves de terminale. En outre, l'étude de la limite d'une suite et d'une fonction en l'infini ou en une valeur finie est aussi à comprendre pour faire une bonne progression en maths.

Pensez surtout à bien suivre ce cours pour bénéficier de ses avantages.

I. Suites et fonctions: étude comparative.

REMARQUE :

Les suites numériques étant des fonctions particulières (définies sur N ou une partie de N), on retrouvera nécessairement pour les suites et les fonctions, des propriétés analogues.

Toutes les propriétés ne seront pas reprises ici, mais seulement celles dont la comparaison est instructive.

Les suites apparaîtront dans la colonne de droite et les fonction numériques dans celle de gauche. Sauf cas particuliers, les suites sont définies sur N ou éventuellement une partie de N (à partir d'un certain rang n_0) et les fonctions sont définies sur R ou une partie de R (la plupart du temps sur un intervalle I).

1 Sens de variation de fonctions et de suites numériques.

f croissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout a$\in$I et b$\in$I, si a $\leq$ b alors f(a) $\leq$ f(b) f strictement croissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout a$\in$I et b$\in$I, si a < b alors f(a) < f(b) f décroissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout a$\in$I et b$\in$I, si a $\leq$ b alors f(a) $\geq$ f(b) f strictement décroissante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout a$\in$I et b$\in$I, si a < b alors f(a) > f(b) f constante sur I $\Leftrightarrow$ Pour tout a$\in$I et b$\in$I, si a $\leq$ b alors f(a) = f(b) f monotone sur I $\Leftrightarrow$ f conserve le même sens de variation sur l'intervalle I Si f est dérivable sur I, alors: f croissante sur I Pour tout x$\in$I, f ' (x) $\geq$ 0 Si f est dérivable sur I, alors: f décroissante sur I Pour tout x$\in$I, f ' (x) $\leq$ 0 Si f est dérivable sur I, alors: f constante sur I Pour tout x$\in$I, f ' (x) = 0	(U_n) croissante Pour tout n$\in$N , on a: $U_n \leq U_{n+1}$ (U_n) strictement croissante Pour tout n$\in$N , on a: $U_n < U_{n+1}$ (U_n) décroissante Pour tout n$\in$N , on a: $U_n \geq U_{n+1}$ (U_n) strictement décroissante Pour tout n$\in$N , on a: $U_n > U_{n+1}$ (U_n) constante Pour tout n$\in$N , on a: $U_n = U_{n+1}$ (U_n) monotone (U_n) est soit croissante, soit décroissant, soit constante.

REMARQUE:

Il se peut que cela ne se réalise pas sur tout l'ensemble N : préciser alors à partir de quel rang cela est vrai.

2.Suites et fonctions majorées, minorées, bornées.

f majorée sur I $\Leftrightarrow$ Il existe M$\in$R, tel que, pour tout x$\in$I, on ait: f(x) $\leq$ M f minorée sur I $\Leftrightarrow$ Il existe m$\in$R, tel que, pour tout x$\in$I, on ait: f(x) $\geq$ m f bornée sur I $\Leftrightarrow$ f est majorée et minorée sur I	(U_n) majorée $\Leftrightarrow$ Il existe M$\in$R, tel que, pour tout n$\in$N, on ait: $U_n \leq M$ (U_n) minorée $\Leftrightarrow$ Il existe m$\in$R, tel que, pour tout x$\in$N, on ait: $U_n \geq m$ (U_n) bornée $\Leftrightarrow$ (U_n) est majorée et minorée

II.Limites de suites et de fonctions.

1.Limite finie ($l \in \mathbb{R}$) et limite en + ∞ de fonctions et suites.

Si f est définie sur R ou un intervalle de la forme [A; +∞[où A∈R et si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour x assez grand, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers + ∞.On écrit $\lim_{x \to ,+\infty} f(x) = l$. Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une **asymptote horizontale** d'équation y = l en + ∞. EXEMPLE: $\lim_{x \to ,+\infty}, \frac{2x+1}{x-1} = 2$	Si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi tous les termes de la suite (Un) à partir d'un certain rang, on dit que (U_n) converge vers l.On écrit $\lim_{n \to ,+\infty} U_n = l$ EXEMPLE: $\lim_{n \to ,+\infty} 5 - \frac{1}{2^n} = 5$

2.Limite finie en - ∞ de fonctions numériques.

Propriété :

Si f est définie sur R ou un intervalle de la forme]- ∞; A] où A∈R et si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour - x assez grand, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers - ∞.

On écrit $\lim_{x \to ,-\infty} f(x) = l$

Dans cette situation, la représentation graphique de f possède alors une **asymptote horizontale** d'équation y = l en - ∞.

EXEMPLE:

$$\lim_{x \to ,-\infty}, \frac{sinx}{x} = 0.$$

3.Limite finie d'une fonction en un point a∈R

Propriété :

Si f est définie sur R ou un intervalle I contenant a∈R et si tout intervalle ouvert contenant l contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour tout x∈I assez proche de a, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers a.

On écrit $\lim\limits_{x \to ,a} f(x) = l$.

EXEMPLE:

$$\lim_{x \to ,0}, \frac{sinx}{x} = 1$$

II.Cas où la fonction ou la suite n'a pas de limite.

Sans entrer dans les détails théoriques, nous allons citer quelques exemples de fonctions et de suites ne possédant pas de limite. Il est intéressant de visualiser ces exemples sur une calculatrice graphique.

1. f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{,|x,,|}{x}$.

Nous avons: Si x > 0, f(x) = 1, donc $\lim\limits_{x \to ,0^+} f(x) = 1$ et si x < 0, f(x) = -1, donc $\lim\limits_{x \to ,0^+} f(x) = -1$.

Les limites à gauche et à droite de 0 existent, mais sont différentes donc **f n'a pas de limite en 0**.

2. Pour tout n∈N, U_n = sin n prend une infinité de valeurs sur l'intervalle [-1 ; 1], sans jamais se rapprocher d'une valeur limite.

3. Pour tout n∈N, $U_n, =, (-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1, donc pas de limite.

III. Le théorèmes de comparaison

Théorème :

Pour les fonctions, dans les propriétés ci-dessous, la lettre a désigne aussi bien un réel que + ∞ ou - ∞.
Lorsque a = + ∞, les fonctions sont définies sur R ou un intervalle I de la forme [A ; + ∞ [où A est un réel.

Lorsque a = - ∞, les fonctions sont définies sur R ou un intervalle I de la forme] - ∞ ; A] où A est un réel.
Lorsque a∈ R , les fonctions sont définies sur R ou un intervalle I de la forme [A ; B] où A et B sont des réels et a∈[A ; B].
Si la limite concernée est la limite à gauche de a, les fonctions sont définies sur un

intervalle I de la forme] - ∞ ; a [ou [A ; a [où A est un réel.
Si la limite concernée est la limite à droite de a, les fonctions sont définies sur un intervalle I de la forme] a ; $+\infty$ [ou] a ; A] où A est un réel.

Pour les suites, l'indice n est un entier naturel supérieur ou égal à un certain rang n_0 (qui sera souvent 0).

IV. Théorème de composition de deux fonctions:

Théorème :

Si f est une fonction définie sur un intervalle J tel que, pour tout x∈I, on ait:
y = u(x)∈J, c'est à dire: u(I) ⊂ J.
Si on a aussi $\lim_{x \to, a} u(x) = b$ et $\lim_{y \to, b} f(y) = l$, alors $\lim_{x \to, a} fou(x) =, l$.

Si f est une fonction définie sur un intervalle J tel que:
pour tout entier $n \geq, n_0$ on ait: $u_n \in, J$
Si on a aussi $\lim_{n \to, +\infty} u_n = b$ et $\lim_{y \to, b} f(y) = l$, alors $\lim_{n \to, +\infty} f(u_n) = l$.