Les inéquations et tableaux de signes

EXERCICE 1 :

Résoudre dans R :

1) $2x - 5 < 3x - 7$

2) $\dfrac{1+4x}{1-4x} = \dfrac{1-4x}{1+4x}$

3) $x^2 + x + \dfrac{1}{4} < (2x+1)^2$

EXERCICE 2 :

1) Démontrer que pour tout réel x, on a $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

2) Soient deux réels x et y tels que $x + y = 1$, démontrer que :

a) $xy < \dfrac{1}{4}$ b) $x^2 + y^2 > \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 3:

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $x^2 + 1$ b) $-\sqrt{x}$ c) $(x - 1)^2 + 4$ d) $-x^2 - 7$

e) $-(-x - 2)^2$ f) $1 + \dfrac{4}{x^2}$ g) $\sqrt{x^2+1} + 3$

EXERCICE 4 :

Dresser, dans chacun des cas suivants, le tableau de signes de A(x).

a) A(x) s'annule en 5 et –2 ; A(x) est strictement positif pour x supérieur à 5 ou inférieur à –2 et A(x) < 0 sur]–2 ; 5[.

b) A(x) ≤ 0 pour x ∈ [–3 ; 4] et A(x) ≥ 0 pour x ∈]–∞ ; –3] ∪ [4 ; + ∞[.

c) A(x) n'existe pas en –1 ; le réel 3 est l'unique solution de l'équation A(x) = 0 et A(x) ≥ 0 sur]– ∞ ; –1[∪]–1 ; 3] et A(x) est négatif pour x ≥ 3.

EXERCICE 5 :

Étudier le signe des expressions suivantes dans un tableau de signes.

a) $(5x - 1)(1 - x)$ b) $(3x + 4)(2x + 3)$ c) $3x(x - 2)$

d) $(2x + 1)(-5 - x)(x - 7)$ e) $\frac{4-x}{2+x}$ f) $\frac{-5}{x(x-1)}$

EXERCICE 6:

Étudier le signe des expressions suivantes après avoir factorisé ou mis au même dénominateur.

a) $(2x - 1)(2 + x) - (2x - 1)^2$ b) $x^2 - (2x + 1)^2$ c) $\frac{x}{x+4} - 2$

EXERCICE 7 :

1/ Déterminer une expression f(x) dont le tableau de signes est :

x	–∞		-2		3		+∞
signe de f(x)		+	0	-	0	+	

2/ Déterminer une expression g(x) dont le tableau de signes est :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
signe de g(x)		**-**	‖	**+**	0	**-**	

EXERCICE 8:

L'étude du signe de l'expression B(x) a permis d'établir le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		–2		1		3		$+\infty$
signe de B(x)		**-**	0	**+**	‖	**+**	0	**-**	

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

a) B(4,5) est négatif.

b) B(1) = 0

c) –2 et 3 sont les solutions de l'équation B(x) = 0.

d) B(0) > 0 e) Si x < 0 alors B(x) < 0.

f) L’ensemble des solutions de B(x) ≤ 0 est]– ∞; –2] ∪[3 ; +∞[.

g) Les nombres tels que B(x) > 0 sont les nombres vérifiant –2 ≤ x ≤ 3.

EXERCICE 9 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a) (2x – 5)(–x – 3) ≥ 0 b) (x – 4)(2x + 3) + (x – 4)(x – 7) ≤ 0

c) (2x – 5)(–x – 3) ≤ –15 d) $(x + 1)^2 > (2x - 3)^2$

e) $\dfrac{3x-1}{2-x} \leq 0$ f) $\dfrac{4x-7}{3x+2} < 4$

g) (–x + 1)(6x – 5)(x + 3) + (–x + 1)(6x – 5)(x – 5) > 0

EXERCICE 10 :

Soit f et g les fonctions définies sur par f(x) = x^2 et g(x) = 4x – 3

1/ a) Tracer les courbes représentant ces deux fonctions sur l’écran de la calculatrice.

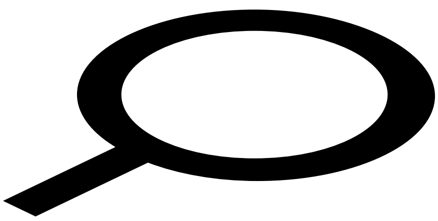
b) En déduire l’ensemble des solutions de l’inéquation f(x) ≥ g(x).

2/ a) Développer (x – 1)(x – 3).

b) Résoudre, par le calcul cette fois, f(x) ≥ g(x).

EXERCICE 11 :

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur [0;7].
Estimer les solutions des équations suivantes.
a) f(x)=2 b) f(x) = 0 c) f(x) =- 1 d) f(x) = 1



EXERCICE 12:

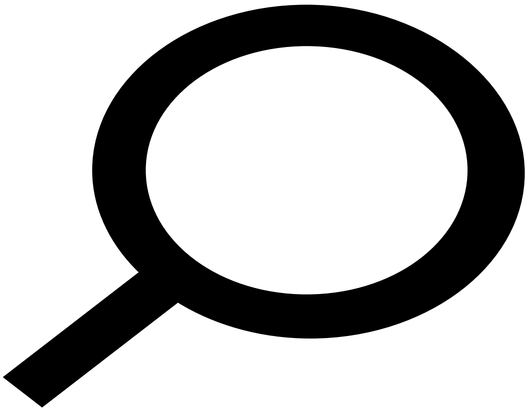
Voici la courbe représentative d'une fonction g définie sur [—5 ; 5].
Estimer les solutions des équations.

a) g(x) = 2

b) g(x) = —3

c) g(x) = 4

d) g(x) =- 1



EXERCICE 13 :

Voici la courbe représentative d'une fonction k définie sur [- 3 ; 4].
Estimer les solutions des équations et inéquations suivantes.

a) k(x) = 1

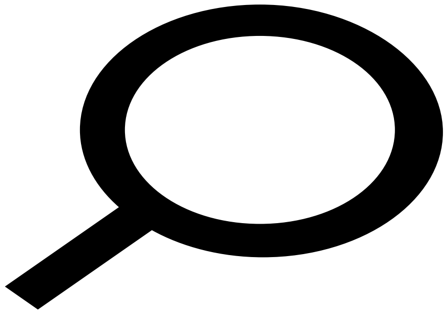
b) k(x) = 0

c) k(x) > - 1

d) k(x) < 0

e) $k(x) \geq -2$

f) $k(x) \geq 2$



EXERCICE 14:

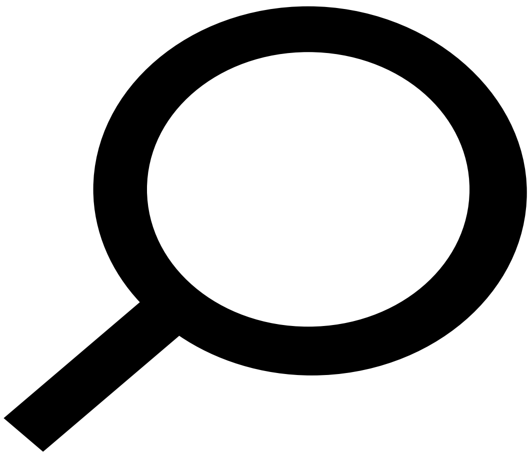
Voici la courbe représentative d'une fonction h définie sur [—5 ; 5].
Estimer les solutions des inéquations suivantes.

a) $h(x) \geq 0$

b) $h(x) < -4$

c) $h(x) < -2$

d) $h(x) > 2$



EXERCICE 15:

Voici les courbes représentatives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur [- 2 ; 3].
Résoudre graphiquement les équations et inéquations.

a) $g(x) = f(x)$

b) $g(x) \leq f(x)$

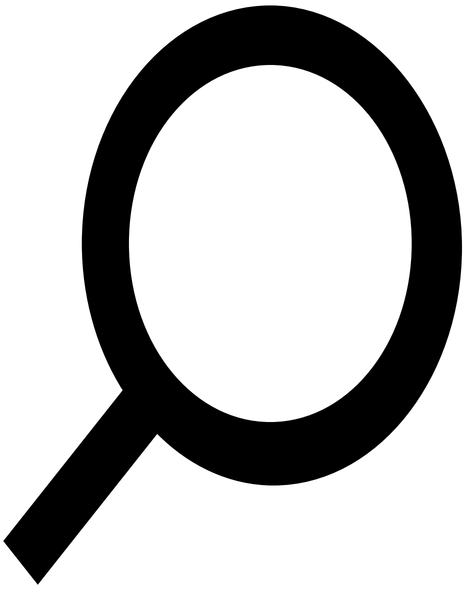
c) $f(x) < -3$

d) g(x) < 2
e) $f(x) \geq -2$

EXERCICE 16 :

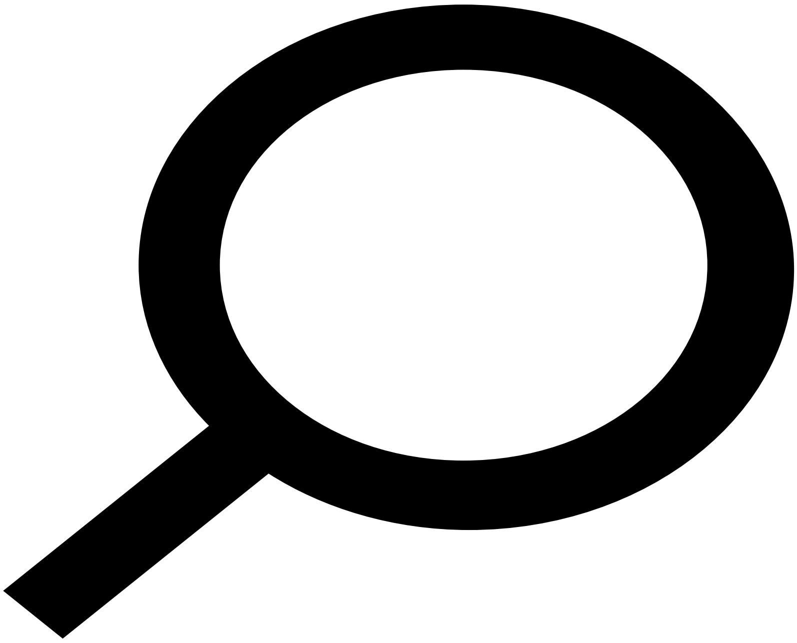
Voici les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur [—4 ; 3].
Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
a) f(x) = 8

b) f(x) < 0
c) f(x) = g(x)
d) $f(x) \leq g(x)$



EXERCICE 17 :

Pour chacune des courbes ci-dessous, dire si elle semble être la courbe représentative d'une fonction paire, d'une fonction impaire ou d'une fonction qui n'est ni paire ni impaire.



EXERCICE 18 :

On a mesuré en continu pendant quatre heures, la concentration C d'un médicament dans le sang d'un patient. La fonction C est représentée ci-dessous.

1. Quelle est la concentration du médicament dans le sang au bout de 2h ?
a) environ 0,5 b) environ 1
c) environ 1.5 d) environ 0,9

2. Laquelle (lesquelles) de(s) (in)équations suivantes a pour solution l'intervalle de temps où la concentration du médicament est au plus égale à 1 ?

a) $C(t)>1$ b) $C(t)=1$
c) $C(t)<1$ d) $C(t)\leq 1$

3. Au bout de combien de temps la concentration dans le sang est-elle égale à 0.5 mg/L ?

a) $\approx$ 40 min b) $\approx$ 2 h 20 min c) $\approx$ 0,667 h

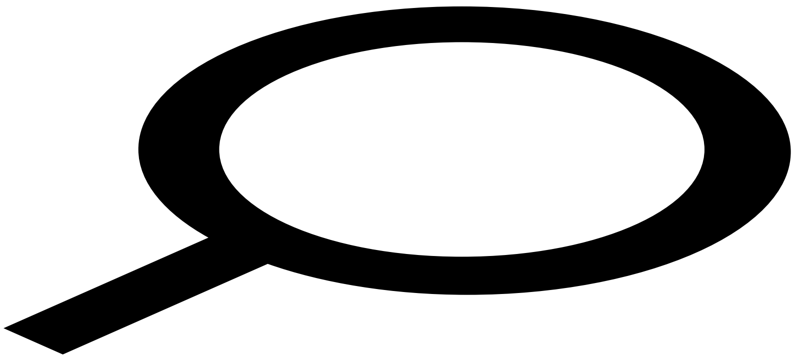
4. Ce médicament est jugé efficace quand la concentration dans le sang dépasse 0.75 mg/L. Quelle est donc sa période d'efficacité ? (Arrondir grossièrement.)
a) jusqu'à 2 h b) jusqu'à 4h

c) dès 45 min   d) entre 0,75 h et 2,2 h

5. Au de combien de temps le médicament est-il le plus concentré ?

a) $\approx$ 1h   b) $\approx$ 1 h 30 min c) $\approx$ 1 h 50 min   d) $\approx$6h

6. Quelle est alors la concentration du médicament dans le sang en mg/L ?
a) $\approx$ 1 b) $\approx$ 1,2 c) $\approx$ 1,25 d) $\approx$ 5.8



EXERCICE 19 :

Une fonction f a les propriétés suivantes :
— elle est définie sur [0 ; 8] ;
— l'équation f(x) = 3 a deux solutions : 1 et 3 ;
— l'image de 0 est 1 ;
— l'inéquation $f(x) \leq 0$ a pour ensemble de solution [5 ; 7].
Tracer dans un repère une courbe possible pour la fonction f.

EXERCICE 20 :

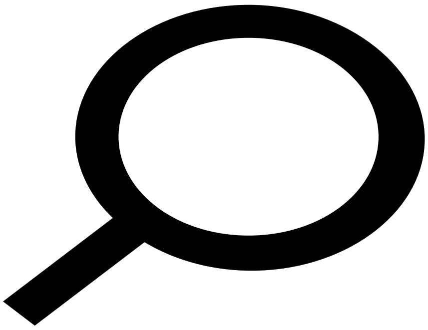
1. Trouver les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes d'équations $y = 2x^2 + 2x + 6$ et $y = 2x^2 - 3x + 7$.

2. Même question pour les courbes d'équations $y = \dfrac{1}{x}$ et $y = \dfrac{2+3x}{x}$.

EXERCICE 21:

On considère les courbes représentatives de la fonction carré, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 6$.
Elles sont tracées dans le repère ci-dessous.

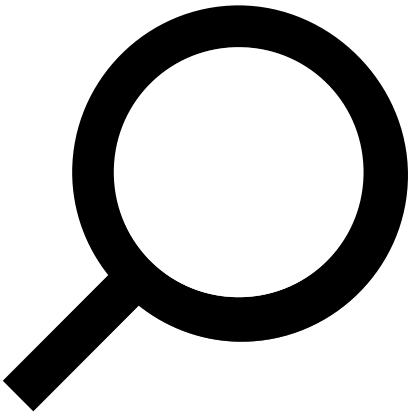
1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
2. Résoudre graphiquement l'équation $x^2 = x + 6$.
3. a) Développer l'expression $(x-3)(x+2)$.
b) Retrouver algébriquement les résultats obtenus la question 2.



EXERCICE 22 :

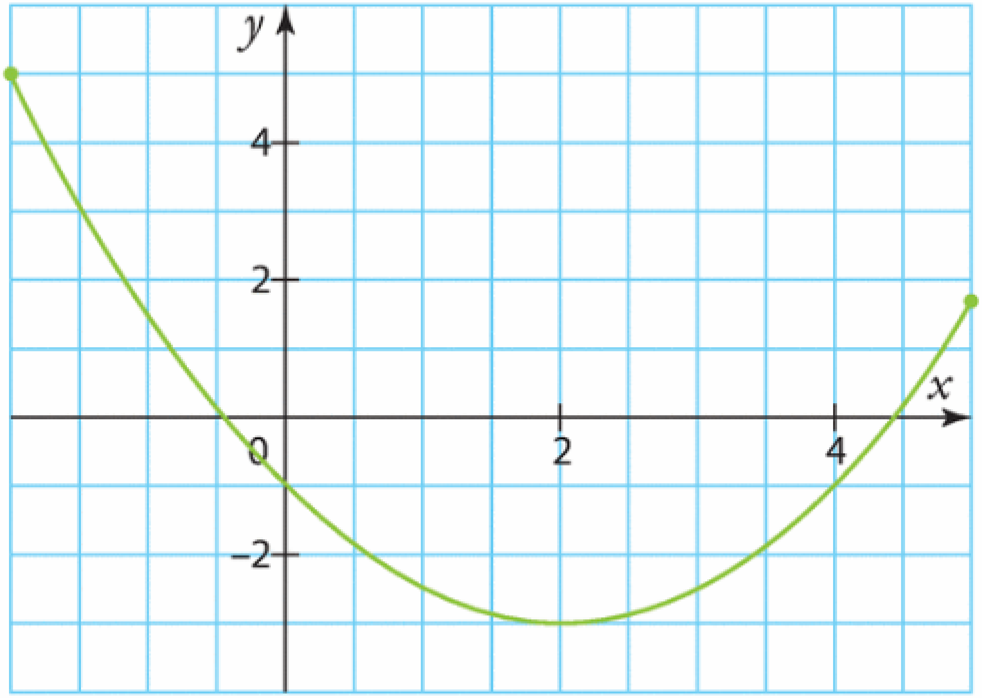
On considère les courbes représentatives de la fonction inverse, notée f, et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = 2x+ 1.

Elles sont tracées dans le repère ci-dessous.
1. Repérer les courbes associées aux deux fonctions.
2. Résoudre graphiquement l'équation $\frac{1}{x} = 2x + 1$.
3.a) Développer l'expression $(2x-1)(x+1)$.
b) Retrouver algébriquement les résultats obtenus à la question 2.

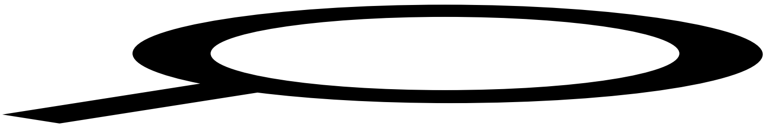


EXERCICE 23:

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur [—2 ; 5] par
$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1.$



1. Estimer graphiquement les deux solutions de l'équation f(x) = 1.
2. Voici un tableau de valeurs de la fonction f.



a) Donner un encadrement d'une des solutions de l'équation f(x) = 1.
b) Quelle est la précision de cette approximation ?
3. A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au dixième près, puis au centième près de l'autre solution.