Les fonctions et leurs variations

I. Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

1.Rappels sur la dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

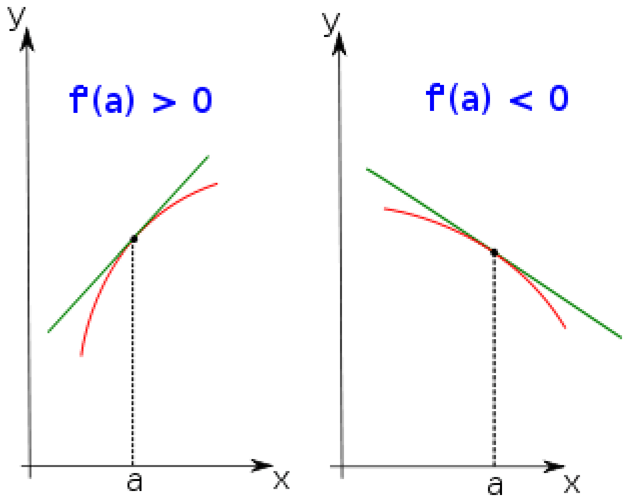
2.Rappels sur les formules de dérivation

Fonction	Dérivée
$f(x) = k\ u$	$f'(x) = k\,u'$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u'v + v'u$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Nous admettrons sans démonstration les théorèmes suivants:

Théorème 1:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle [a ; b],
· Si, pour tout $x \in] a ; b [$, on a: $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur [a ; b].
· Si, pour tout $x \in] a ; b [$, on a: $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur [a ; b].
· Si, pour tout $x \in] a ; b [$, on a: $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur [a ; b].



Théorème 2:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I,
· Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) > 0$ (sauf peut-être en des points isolés où $f'(x) = 0$), alors f est **strictement croissante** sur I.
· Si, pour tout $x \in I$, on a: $f'(x) < 0$ (sauf peut-être en des points isolés où $f'(x) = 0$), alors f est **strictement décroissante** sur I.

Notons deux cas particuliers utiles:

Propriété :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle [a ; b],
· Si, pour tout $x \in] a ; b [$, on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur [a ; b].
· Si, pour tout $x \in] a ; b [$, on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur [a ; b].

EXEMPLES:

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2x$.
· Pour tout $x \in]-\infty ; 0]$, on a f '(x) £ 0, donc f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
· Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, on a f '(x) ³ 0, donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
· Pour tout $x \in]-\infty ; 0 [$, on a $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur]-¥ ; 0].
· Pour tout $x \in]0 ; +\infty [$, on a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3$. f est dérivable sur ℝ avec f '(x) = $3x^2$.
· Pour tout x ∈ ℝ , on a f '(x) ³ 0, donc f est croissante sur ℝ .
· Pour tout x ∈]- ∞; 0 [È]0 ; + ∞ [, on a f '(x) > 0, donc f est strictement croissante sur ℝ .

3) Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x) = 2. f est dérivable sur ℝ avec f '(x) = 0.
· Pour tout x ∈ ℝ , on a f '(x) = 0, donc f est constante sur ℝ .

Nous admettrons sans démonstration les théorèmes suivants:

Théorème 3:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x = a **différent des extrémités de l'intervalle I**, alors: f '(a) = 0.

Théorème 4:

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si a∈I et a différent des extrémités de I.
Si f '(x) s'annule pour x = a **en changeant de signe**.
Alors f(a) est un extremum local de f sur I.

EXEMPLES:
1) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2$. f est dérivable sur ℝ avec f '(x) = 2x.
f '(x) s'annule en x = 0 en changeant de signe, donc f(0) = 0 est un extremum local de f.
Cet extremum est en réalité un minimum, car f est strictement décroissante sur]- ∞ ; 0] et strictement croissante sur [0 ; + ∞[. Ceci peut se résumer dans un tableau de variation.
2) Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3$. f est dérivable sur ℝ avec f '(x) = $3x^2$.
f '(x) s'annule en x = 0 sans changer de signe, il n'y a donc pas d'extremum en x = 0.