Intégrales

EXERCICE N° 1 :

Calculer la valeur des deux intégrales suivantes :

$a) \int_0^4 3dx \ ; \ b) \int_3^7 (\frac{1}{2}t + 2dt \ )$

EXERCICE N° 2 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1\ )^2}$.

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, dire s'il s'agit d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F_1(x) = \frac{-1}{e^x+1}$$
$$F_2(x) = \frac{2e^x+1}{e^x+1}$$
$$F_3(x) = \frac{2e^{-x}+1}{e^{-x}+1}$$
$$F_4(x) = \frac{e^{-x}+2}{e^{-x}+1}$$

EXERCICE N° 3 :

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions numériques suivantes :

$a) \ f(x) = 5x^4 - 3x + 7\,, \ I = \mathbb{R}$
$b) \ g(x) = 4(3x-1)^5\,, \ I = \mathbb{R}$
$c) \ h(x) = \frac{7x}{x^2+4}\,, \ I =]-4;+\infty[$
$d) \ i(x) = 3xe^x\,, \ I = \mathbb{R}$

EXERCICE N° 4 :

a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle [0;1],

$2-2e^t \leq \ 2-2e^t \leq \ 0$

b) Démontrer que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[1;+\infty[$

$$2-2e^{t^2} \leq 2-2e^t$$

c) En déduire :

- un encadrement de $\int_0^1 (2-2e^{t^2})dt$
- l'inégalité $\int_1^5 (2-2e^{t^2})dt \leq 8+2(e-e^5)$

EXERCICE N° 5 :

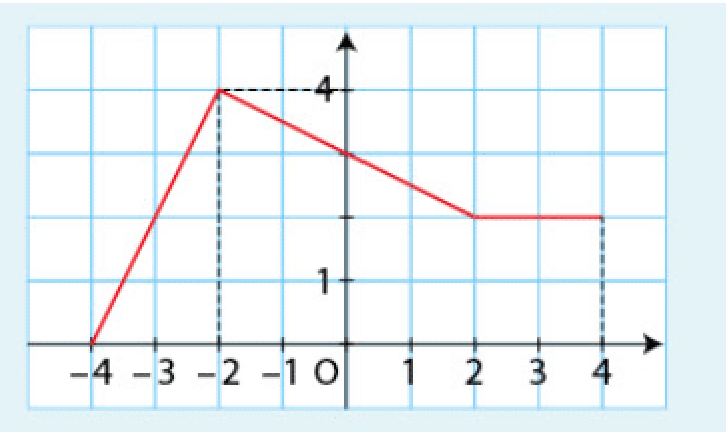
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \leq ln2$$

EXERCICE N° 6 :

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie

et continue sur l'intervalle [-4;4].



Calculer les intégrales suivantes :

$$a) \int_{-4}^{-2} f(t)dt$$

$$b) \int_{-2}^{2} f(t)dt$$

$$c) \int_{2}^{4} f(t)dt$$

EXERCICE N° 7 :

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$a) \int_{-2}^{1} 5dx$

$b) \int_{-1}^{2} (-t+4)dt$

$c) \int_{-3}^{3} (x+3)dx$

$d) \int_{0}^{5} (2x+1)dx$

$e) \int_{-2}^{2} \left(1-\frac{x}{2}\right)dx$

$f) \int_{-1}^{1} (1-|x|)dx$

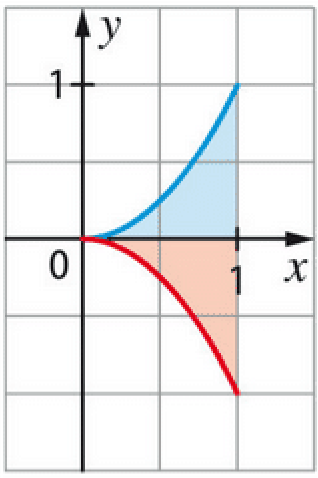
EXERCICE N° 8 :

Sur le graphique ci- dessous sont tracées les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur [0 ; 1] par $f(x)=x^2$ et $g(x)=-x^2$ et deux surfaces limitées par ces courbes.

1. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface colorée en bleu.

2. En déduire, sans calcul, l'aire, en unités d'aire, de la surface colorée en rouge.

3. Retrouver l'aire précédente par un calcul d'intégrale.

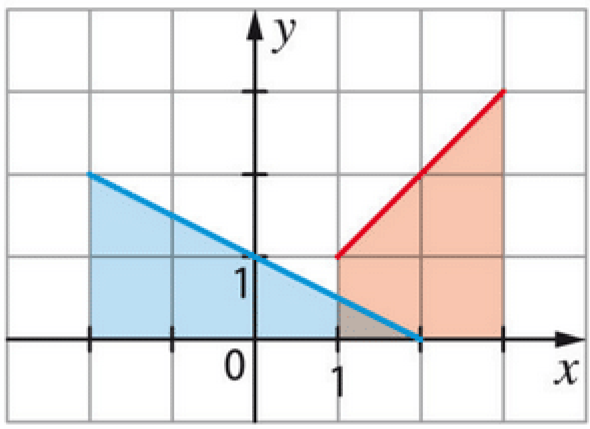


EXERCICE N° 9 :

Pour l'exercice, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse, puis justifier.

Soit $I = \int_{1}^{3} x dx$ et $J = \int_{-2}^{2} -0,5x + 1 dx$.

Par lecture graphique sur le schéma ci-contre I = J.



EXERCICE N° 10 :

Déterminer une primitive de chacune des fonctions f, g et h sur $\mathbb{R}$ par leurs expressions.

$1) f(x) = 2xe^{x^2-3}; g(x) = \dfrac{x}{x^2+4}; h(x) = cos(x)sin^2(x)$.

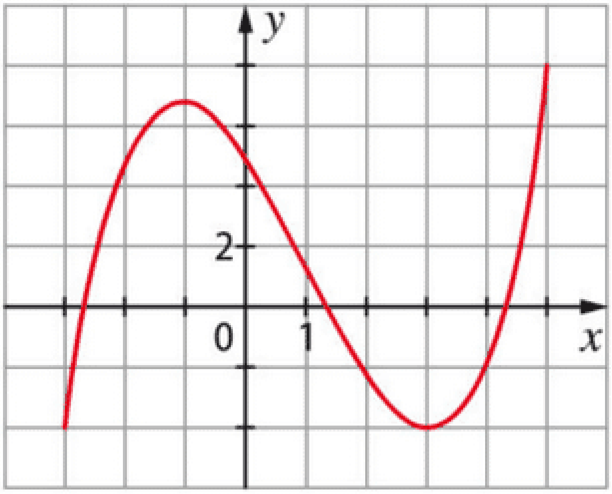
$2) f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}; g(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}; h(x) = x(x^2+5)^{-3}$.

$3) f(x) = xe^{-x^2}, g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}; h(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

EXERCICE N° 11 :

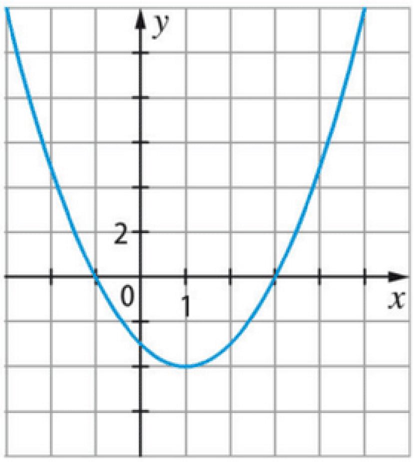
Soit une fonction f définie sur [- 3 ; 5].

La courbe ci-dessous représente une primitive F sur [- 3; 5] de f.

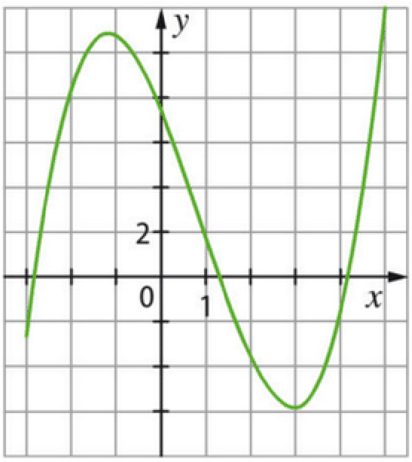


Parmi les deux courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction f? Justifier.

Courbe 1



Courbe 2



EXERCICE N° 12 :

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx.$$

1)a) Encadrer l'inverse de x sur [n ; n+1].

b) Calculer $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx$.

c) Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n}$.

2) En déduire la limite de la suite (I_n).

Consulter le corrigé.