Fonction convexe

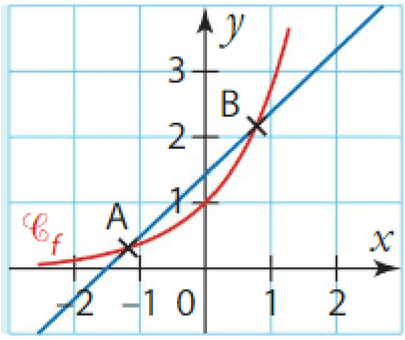
La fonction convexe est un chapitre essentiel à bien comprendre par l'élève. Cela lui permettra de bien progresser en Maths.

I. Convexité d'une fonction

1.Sécante à la courbe représentative d'une fonction.

Définition :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.
Soit A et B deux points de C_f alors la droite (AB) est **sécante** de C_f.



2.Convexité et concavité.

Définitions :

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On dit que :

1. f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, C_f est en dessous de ses sécantes.
2. f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I, C_f est au-dessus de ses sécantes.

3. les fonctions usuelles.

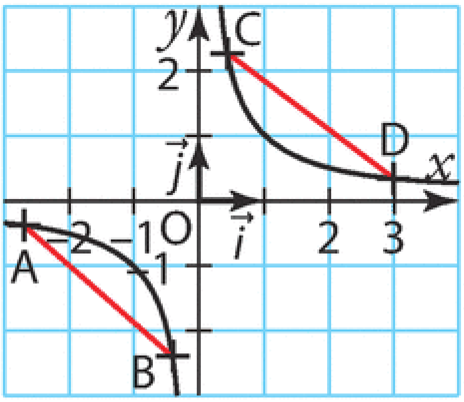
Propriété :

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave.

Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto e^x$ sont convexes.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE :

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



Alors le segment [CD] est au-dessus de la courbe de C_f pour x strictement positif donc f est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ et le segment [AB] est en dessous de la courbe C_f pour x strictement négatif
donc f est concave sur $\mathbb{R}^{-*}$.

4.Position par rapport aux sécantes.

Propriété :

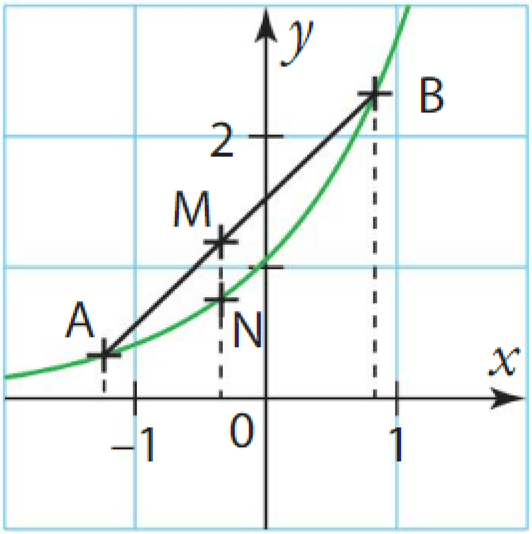
• Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0;1]$, on a :
$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$
• Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout t $t \in [0;1]$, on a :
$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$

DÉMONSTRATION :

Soient deux réels x et y et soit $t \in [0;1]$.

Soit $A(x;f(x))$ et $B(y;f(y))$; Alors le point $M(tx+(1-t)y;tf(x)+(1-t)f(y))$ appartient au segment [AB], sécante de C_f .

f étant convexe, cette sécante est située au-dessus de C_f.
M est donc situé au-dessus du $M(tx+(1-t)y;f(tx+(1-t)y))$.
D'où $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$.



REMARQUE :

Si les inégalités précédentes sont strictes, on dira que f est une **fonction strictement convexe ou strictement concave** sur I.

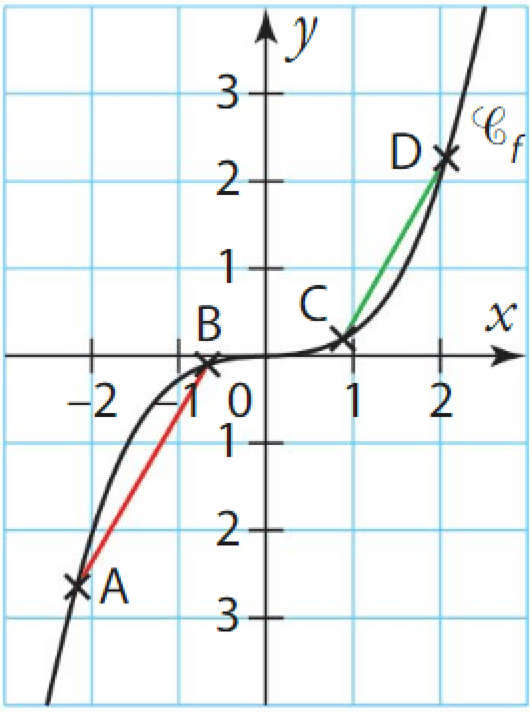
Propriété : concavité.

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave.

EXEMPLE :

Soit fla fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-e^x$.

La fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, donc $f: x \mapsto -e^x$ est concave.



II. Fonction convexe et dérivées première et seconde

1.Fonction convexe et fonction concave.

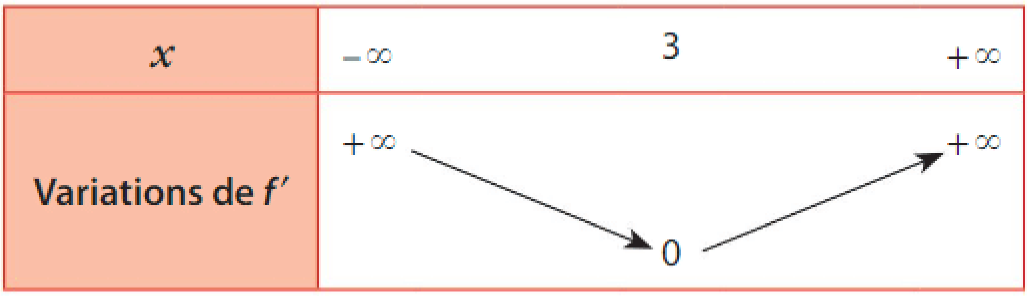
Théorème :

Soit I un intervalle réel.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- f est convexe sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est croissante.
- f est concave sur I, si et seulement si, pour tout réel x de I, f' est décroissante.

EXEMPLE :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a dressé le tableau de variations de la fonction f'.



Alors f est concave sur $]-\infty\,;\,3]$ et convexe sur $[3;+\infty\,[$.

2.La fonction dérivée seconde.

Définition :

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.
On appelle dérivée seconde de la fonction f, notée f'', la dérivée de f'.

EXEMPLE :

Soit f la fonction définie (et dérivable deux fois) sur $\mathbb{R}$ par l'expression
$f(x)=x^3+4x^2+5x+1$
Alors $f'(x)=3x^2+8x+5$ et $f''(x)=6x+8$.

REMARQUES :

1. La **dérivée seconde** d'une fonction affine est toujours nulle.
2. La fonction exponentielle est égale à sa dérivée, donc à sa dérivée seconde également.

3.Convexité et dérivée seconde.

Théorème :

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable et f' sa fonction dérivée.

1. f est convexe sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' est positive.
2. f est concave sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, f'' est négative.

DÉMONSTRATION :

f' est croissante (resp. décroissante) si et seulement si est f'' est positive (resp. négative).
Donc f est convexe (resp. concave) si et seulement si f'' est positive (resp. négative).

III. Tangente et point d'inflexion

1.Dérivée seconde et tangente.

Propriété :

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I de dérivée seconde f''.

Si f'' est positive sur I, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

PREUVE :

Soit ϕ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente.
$\phi(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0)$.
Alors ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$.

Or f'' est positive donc f' est croissante. D'où :
si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geq 0$.
si $x \leq x_0$ alors$f'(x) \leq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leq 0$.
De plus, $\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0$

On obtient le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $\phi'(x)$		$-$		$+$	
Variations de ϕ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc, pour tout réel x de I, $\phi(x) \geq 0$ donc $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ autrement dit, la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

CONCLUSION :

Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

REMARQUES :

1. Si f'' est négative sur I alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

2. Attention à la réciproque, une fonction convexe n'est pas obligatoirement deux fois dérivable.

2.Point d'inflexion à la courbe représentative d'une fonction.

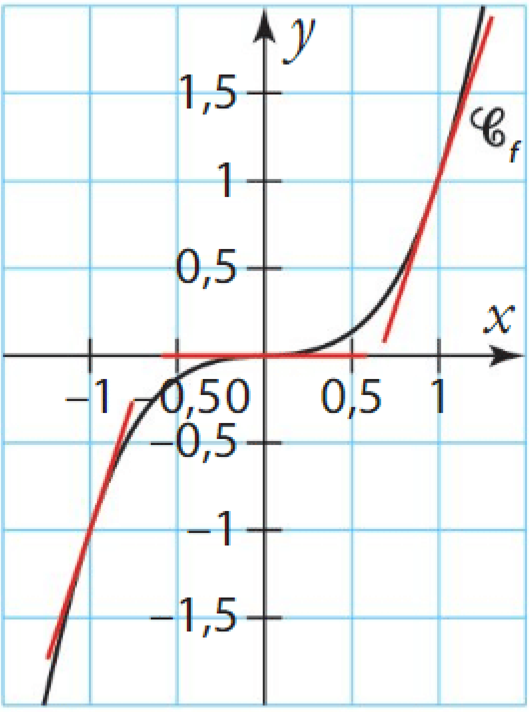
Définition :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative sur cet intervalle
dans un repère orthonormé du plan.
Soit A un point de C_f et T_A la tangente C_f au point A.
On dit que A est un point d'inflexion pour C_f si, au point A, la courbe C_f traverse T_A.

EXEMPLE :
Soit f la fonction cube et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Alors l'origine du repère $O(0\,;\,0)$ est un point d'inflexion pour C_f.

En revanche les tangentes en -1 et en 1 ne traversent pas la courbe, les points de coordonnées $(-1; f(-1))$ et $(1; f(1))$ne sont donc pas des points d'inflexion.



Propriété :

Pour qu'il y ait point d'inflexion, il faut que f'' change de signe donc que f' change de variation.

EXEMPLE :

Si $f(x) = x^3$ alors $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
Donc $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ et $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Il y a changement de signe de la dérivée seconde, donc f change de convexité, il y a donc en $O(0\,;\,0)$ un point d'inflexion.