Ensembles de nombres, calcul numérique et littéral

I. Nombres et ensembles de nombres

1. Ensembles de nombres

Définitions :

- Un nombre est dit décimal s'il peut s'écrire comme quotient d'un entier par une puissance de 10.
- Un rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux entiers.
- Un irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel.
- Dans un nombre relatif, on distingue le signe (+ ou −) et la valeur absolue.

Exemple :

-3 a pour signe – et valeur absolue 3. On note $|-3| = 3$.

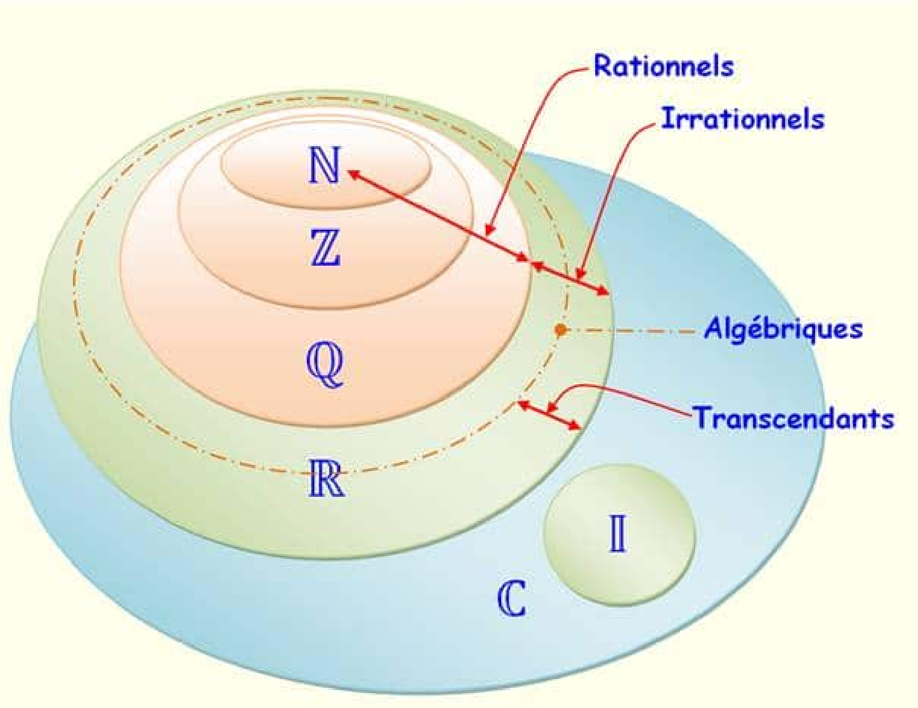
Notations :

- $\mathbb{N}$: Ensemble des nombres entiers positifs, ou entiers naturels.

- $\mathbb{Z}$: Ensemble des nombres entiers relatifs.

- $\mathbb{D}$: Ensemble des nombres décimaux.
- $\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

Diagramme de Venn :



On a donc les inclusions suivantes :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Notations d'entiers :

On note souvent n un entier naturel. Le nombre suivant est donc $n + 1$.

Le précédent $n - 1$.

Les entiers pairs sont les $2k$ pour $k \in \mathbb{N}$ et les impairs les $2k + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$.

De même les multiples de 3 peuvent se noter $3k$, ceux de 4 se notent $4k$.

2.Les nombre rationnels et irrationnels

- Pour tous ces nombres, nous ne disposons pas d'écriture décimale exacte. On ne peut donc utiliser un signe d'égalité entre et 3,141 592 653 par exemple. On note ≈ 3,141 592 653 .

Remarque :

Il est très important de distinguer la valeur exacte d'un nombre d'une valeur approchée (par excès ou par défaut) .

Ex : 3,14 < π < 3,15 est un encadrement de π d'amplitude 10^{-2}.

3. Calculer avec des racines carrées

Définition :

On appelle racine carrée d'un nombre positif a, l'unique nombre positif , noté $\sqrt{a}$,dont le carré est a .

c'est-à-dire pour $a \geq 0, \sqrt{a} \geq ;\ (\sqrt{a}\ )^2 = a$.

Règles de calcul :

- Pour $a \geq 0; \sqrt{a^2} = a$.
- Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour $a \geq 0$ et $b > 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Attention :

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, cette égalité est en générale fausse.

Contre-exemple :

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

4.Résolution d’équation

Propriété :

L’équation $x^2 = a$ possède deux solutions lorsque $a \geq 0$: $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.

5.Les identités remarquables

Propriété :

Pour tous nombres réels a et b on a les égalités suivantes :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

6.Les quadrilatères :

Pour chaque type de quadrilatère, chaque propriété est à la fois nécessaire et suffisante : c’est une propriété caractéristique.

Propriétés :

Un quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si :

- ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux;
- ses côtés opposés sont parallèles deux à deux;
- ses diagonales se coupent en leur milieu;
- ses angles opposés sont égaux;
- il est non croisé et deux de ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.

Propriétés :

Un quadrilatère ABCD est un losange si et seulement si :

- ses quatre côtés sont de même longueur;
- c’est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur;
- c’est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires.

Propriétés :

Un quadrilatère ABCD est un rectangle si et seulement si :

- il a 3 angles droits
- c’est un parallélogramme qui a un angle droit
- c’est un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur

Propriétés :

Un quadrilatère ABCD est un carré si et seulement si :

  - ses quatre côtés sont de même longueur et il a un angle droit;
  - c’est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires;

- c’est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.

Remarque :

Un carré est à la fois un parallélogramme, un rectangle et un losange.