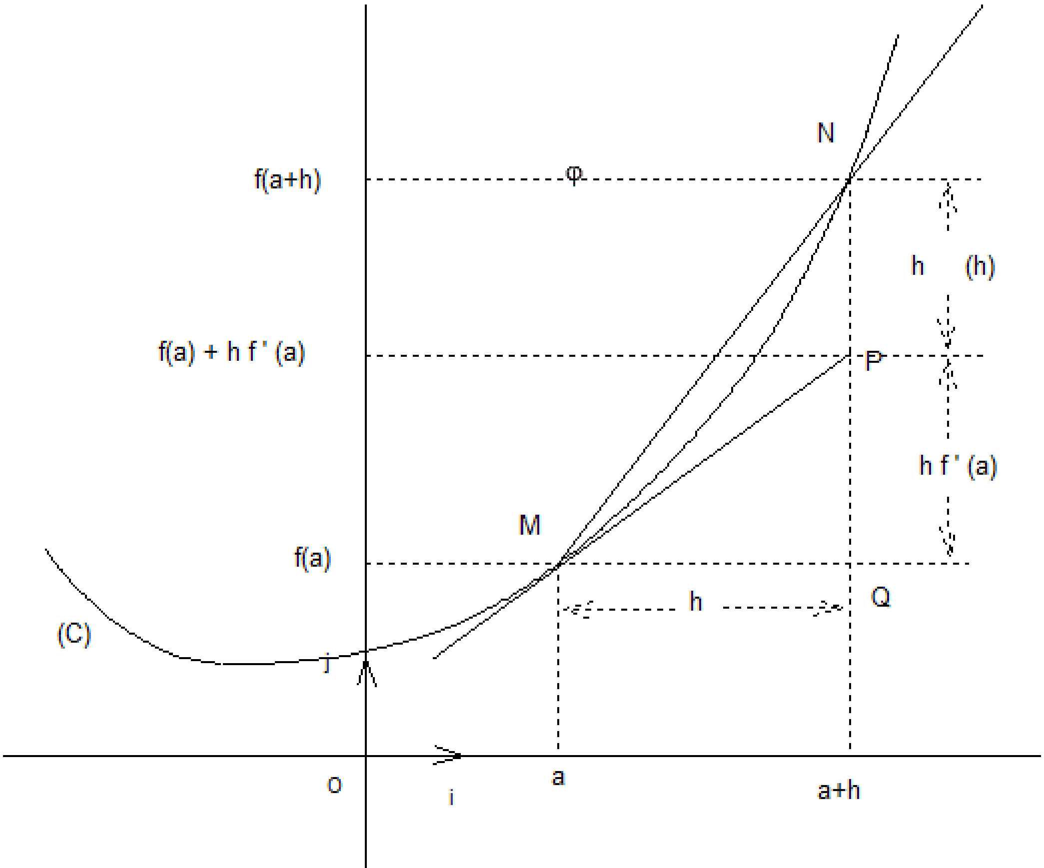
Dérivée d’une fonction

I. Nombre dérivé et dérivée d'une fonction

f est une fonction définie sur un intervalle I.

La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

M et N sont deux points de (C) d'abscisses respectives $a \in I$ et $x = a + h \in I$où $h \in \mathbb{R}^*$.



Définition 1

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si $a \in I$.
Lorsqu'il existe un nombre réel d tel que, pour tout réel h proche de 0, on ait:

$$\lim_{h\,arrow\,0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = d$$

On dit que la fonction f est dérivable en a et que d = f '(a) est le **nombre dérivé** de f en a.

Définition 2

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si a∈I.
Lorsqu'il existe un nombre réel d tel que, pour tout réel x∈I et proche de a, on ait:

$$\lim_{x,arrow,a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = d$$

On dit que la fonction f est dérivable en a et que d = f '(a) est le nombre dérivé de f en a.

II. Fonction dérivable sur un intervalle I

Définition :

On dit que f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout point de I

Remarques sur les notations et les "manies des physiciens"

Les physiciens expriment la différence h = x - a par la le symbole $\Delta\, x$ (accroissement de la variable x au voisinage du point a) et la différence f(x) - f(a) par $\Delta\, y$ (accroissement correspondant entre les images de x et de a qu'ils assimilent aux ordonnées y).

Avec ces notations, ils écrivent alors au voisinage de a: $\lim_{\Delta\, x\, arrow\, 0} \frac{\Delta\, y}{\Delta\, x} = f'(a)$.

De façon générale, sur un intervalle I, en notant "y" la fonction "f", la fonction dérivée de y sera notée: $f' = \frac{dy}{dx}$.

Historiquement, la notation $f\,'(x)$est due à **Newton** et la notation différentielle $\frac{dy}{dx}$ provient de **Leibniz**.

III. Equation de la tangente et approximation affine de f au voisinage de x = a

En reprenant les données du début de la leçon et l'illustration graphique et en supposant que la fonction f est dérivable en a:
La tangente (MP) à la courbe (C) en M d'abscisse a existe.Elle a pour coefficient directeur m = f '(a).

Son équation est donc de la forme: y = mx + p, où m = f '(a) et son ordonnée à l'origine p est à calculer.
Pour cela, il suffit d'écrire que (MP) passe par M(a ; f(a)).

On a donc: $f(a) \; =, f\,'(a) \; \times \; a \; + \; p$.
Ceci donne: $p \; = \; f(a) \; - \; a\,f\,'(a)$.

Donc y = f '(a) x + f(a) - a f '(a) que l'on écrit souvent sous l'une des formes, plus faciles à retenir:

$\mathbf{y \; = \; f\,'(a)\,(x-a) \; + \; f(a)}$ ou $\mathbf{y \; - \; f(a) \; = \; f\,'(a)\,(x-a)}$**.**

Donc, la tangente (MP) à la courbe (C) en M est la représentation graphique de la fonction affine g:

$g : x \; \mapsto \; f'(a)(x-a) + f(a)$

Montrons que cette fonction affine est une approximation de la fonction f lorsque x est proche de a.
En effet, l'ordonnée du point P d'abscisse x = a + h est: $g(x) \; = \; f\,'(a)\,(x-a) \; + \; f(a)$.

Elle s'écrit aussi: $g(a \, + \, h) \; = \; f\,'(a)\,(a \, + \, h \, - \, a) \; + \; f(a)$, c'est à dire:
$g(a \, + \, h) \; = \; f(a) \; + \; h\,f\,'(a)$.

Or, f(a+h) = f(a) + h f '(a) + h φ(h) avec $\lim\limits_{h\,arrow\,0} \varphi\,(h) = \; 0$.

On en déduit que, **lorsque h est voisin de zéro, on a: f(a+h)** $\approx$ **f(a) + h f '(a).**

On peut donc conclure que, lorsque x est voisin de a, la fonction affine
$g : x \; \mapsto \; f'(a)(x-a) + f(a)$ est une **approximation de la fonction** .

On peut même montrer, mais nous l'admettrons ici, que c'est **la meilleure approximation affine de f au voisinage de a**.

IV.La dérivée des fonctions usuelles.

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

V.Les formules de dérivation

Fonction	Dérivée
$f(x) = k\ u$	$f'(x) = k\,u'$
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u \times v$	$f'(x) = u'v + v'u$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$