Arithmétique

L'arithmétique est un cours de maths en troisième (3ème) très important. De plus, vous y verrez la définition et la propriété de la division euclidienne ainsi que la définition d'un nombre premier et le théorème de décomposition en facteurs premiers de n'importe quel nombre entier.
L'élève devra connaître la définition d'un diviseur et d'un multiple et connaître les différents critères de divisibilité. Ensuite, vous allez développer des compétences en arithmétique avec la décomposition en facteurs premiers d'un entier.

Nous terminerons ce chapitre sur l'arithmétique en résolvant des problèmes de la vie courante en troisième.

I. La division euclidienne en arithmétique :

1.Division euclidienne :
Définition :

On considère deux nombres entiers relatifs positifs a et b avec b non nul et a>b.Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver l'**unique couple** d'entiers positifs (q,r) tel que :

$a = bq + r$avec $0 \leq r < b$.

Si r=0, on dit que a est un **multiple** de b ou encore que b est un **diviseur** de a.

EXEMPLE :

Prenons a=187 et b=13, on pose la division euclidienne pour obtenir q et r.

Donc $187 = 13 \times 14 + 5$ avec 5<13.

2.Multiples et diviseurs en arithmétique :

EXEMPLE :

Prenons a= 135 et b = 15.

On a $135 = 15 \times 9 + 0 = 15 \times 9$.

Donc 135 est un multiple de 15 et 15 est un diviseur de 135.

REMARQUES :

- Un nombre entier a un nombre fini de diviseurs, mais un nombre infini de multiples.
- Un nombre entier supérieur à 1 admet toujours au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

3.Critères de divisibilité avec l'arithmétique :

Propriété :

On considère un entier positif non nul n.

- n est divisible par 2 si il se termine par 0,2,4,6, ou 8.
- n est divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.
- n est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- n est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

EXEMPLE :

- 915 n'est pas divisible par 2 car il se termine par 5.
- 915 n'est pas divisible par 4 car 15 ne l'est pas.
- 915 est divisible par 3 car $9 + 1 + 5 = 15 = 5 \times 3$ et 15 est divisible par 3.

II. Les nombres premiers avec l'arithmétique :

1.Définition :
Définition :

On considère un nombre entier positif non nul n.L'entier n est un **nombre premier** si, et seulement si, il possède exactement **deux diviseurs** qui sont 1 et lui-même.

EXEMPLES :

- La liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37.
- 91 n'est pas un nombre premier car $91 = 13 \times\ 7$ donc il possède 4 diviseurs.

2.Décomposition en facteurs premiers :

Propriété :

On considère un entier n positif et supérieur à 1.L'entier n peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Nous avons $n = p_1^{a_1} \times\ p_2^{a_2} \times\ ...p_q^{a_q}$, cette écriture, appelée **décomposition en facteurs premiers** de n, est **unique**, à l'ordre des facteurs près.

EXEMPLES :

$504 = 8 \times\ 63 = 8 \times\ 9 \times\ 7 = 2^3 \times\ 3^2 \times\ 7$

Propriété :

Pour **décomposer un nombre entier** en un produit de facteurs premiers, il faut décomposer progressivement cet entier à l'aide des nombres premiers en procédant dans l'ordre croissant.

EXEMPLE :

On veut décomposer l'entier 3 626 en produit de facteurs premiers.

$3626 = 2 \times\ 1813 = 2 \times\ 7 \times\ 259 = 2 \times\ 7 \times\ 7 \times\ 37 = 2 \times\ 7^2 \times\ 37$

3. Les fractions irréductibles :

Définition :

soient a et b deux nombres entiers positifs tel que b soit non nul.Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque l'on ne peut plus la simplifier.

La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si, et seulement si, le plus grand commun diviseur, noté **pgcd(a,b)**, des nombres a et b vaut 1.

REMARQUE :

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque le plus grand commun diviseur de a et b (noté pgcd(a,b)) vaut 1.

EXEMPLE :

$\frac{168}{3626} = \frac{2^3 \times\ 3 \times\ 7}{2 \times\ 7^2 \times\ 37} = \frac{2 \times\ 2 \times\ 3}{7 \times\ 37} = \frac{12}{259}$ où $\frac{12}{259}$ est une fraction irréductible car pgcd(12,259)=1.